

第一节 函 数



一、基本概念



二、函数概念



三、函数的特性



四、反函数



五、小结 思考题

帮助

返回

一、基本概念

1. **集合**: 具有某种特定性质的事物的总体.

组成这个集合的事物称为该集合的元素.

$$a \in M, \quad a \notin M,$$

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \quad \text{有限集}$$

$$M = \{x \mid x \text{ 所具有的特征} \} \quad \text{无限集}$$

若 $x \in A$, 则必 $x \in B$, 就说 A 是 B 的子集.
记作 $A \subset B$.

数集分类: N ----自然数集 Z ----整数集
 Q ----有理数集 R ----实数集

数集间的关系: $N \subset Z, Z \subset Q, Q \subset R$.

若 $A \subset B$, 且 $B \subset A$, 就称集合 A 与 B 相等. ($A = B$)

例如 $A = \{1, 2\}$,

$C = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$, 则 $A = C$.

不含任何元素的集合称为空集. (记作 $\emptyset$)

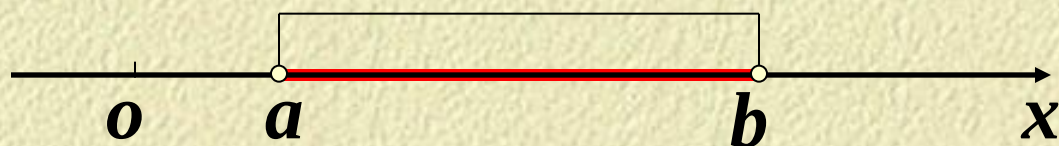
例如, $\{x \mid x \in R, x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$

规定 空集为任何集合的子集.

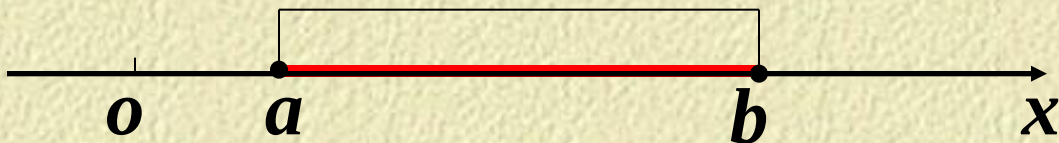
2. 区间: 是指介于某两个实数之间的全体实数.
这两个实数叫做区间的端点.

$\forall a, b \in R, \text{且} a < b.$

$\{x | a < x < b\}$ 称为开区间, 记作 (a, b)



$\{x | a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间, 记作 $[a, b]$



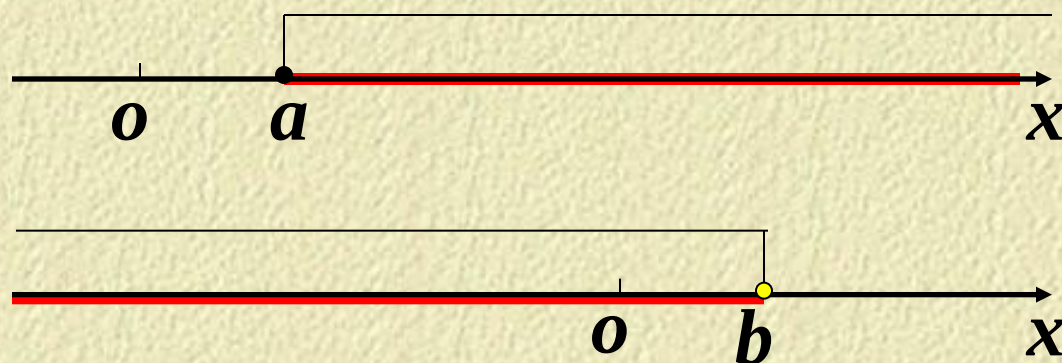
$\{x|a \leq x < b\}$ 称为半开区间, 记作 $[a, b)$

$\{x|a < x \leq b\}$ 称为半开区间, 记作 $(a, b]$

有限区间

$[a, +\infty) = \{x|a \leq x\}$ $(-\infty, b) = \{x|x < b\}$

无限区间



区间长度的定义:

两端点间的距离(线段的长度)称为区间的长度.

上页

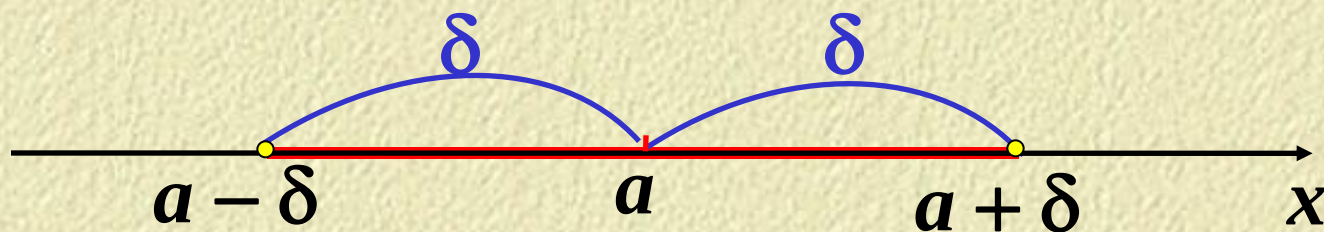
下页

返回

3. 邻域：设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta > 0$.

数集 $\{x \mid |x - a| < \delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域，
点 a 叫做这邻域的中心， δ 叫做这邻域的半径.

$$U_{\delta}(a) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\}.$$



点 a 的去心的 δ 邻域，记作 $U_{\delta}^0(a)$.

$$U_{\delta}^0(a) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}.$$

4. 常量与变量:

在某过程中数值保持不变的量称为常量,
而数值变化的量称为变量.

注意 常量与变量是相对“过程”而言的.

常量与变量的表示方法:

通常用字母 a, b, c 等表示常量,
用字母 x, y, t 等表示变量.

5. 绝对值: $|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases} \quad (|a| \geq 0)$

运算性质: $|ab| = |a||b|;$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}; \quad |a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|.$$

绝对值不等式:

$$|x| \leq a \ (a > 0) \iff -a \leq x \leq a;$$

$$|x| \geq a \ (a > 0) \iff x \geq a \text{ 或 } x \leq -a;$$

二、函数概念

定义 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的数集, 如果对于每个数 $x \in D$, 变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作

$$y = f(x)$$

数集 D 叫做这个函数的定义域

因变量

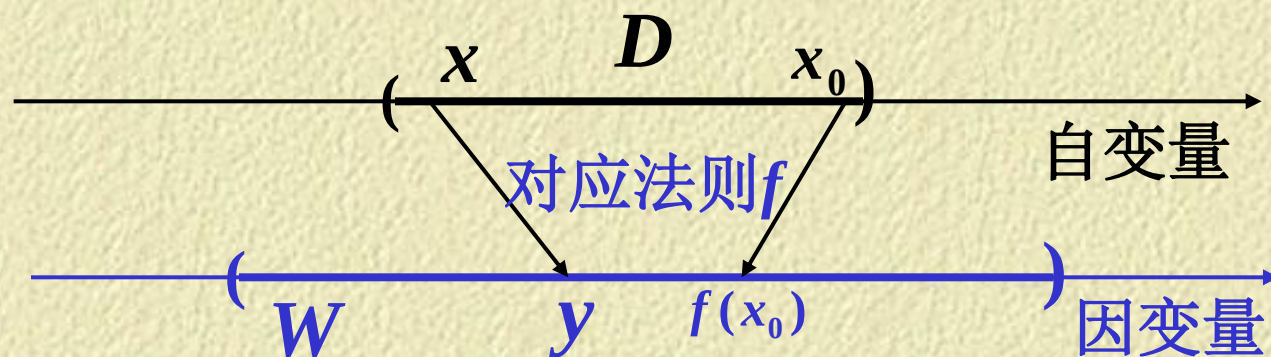
自变量

当 $x_0 \in D$ 时, 称 $f(x_0)$ 为函数在点 x_0 处的函数值.

函数值全体组成的数集

$W = \{y | y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域.

函数的两要素：定义域与对应法则.



约定：定义域是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值.

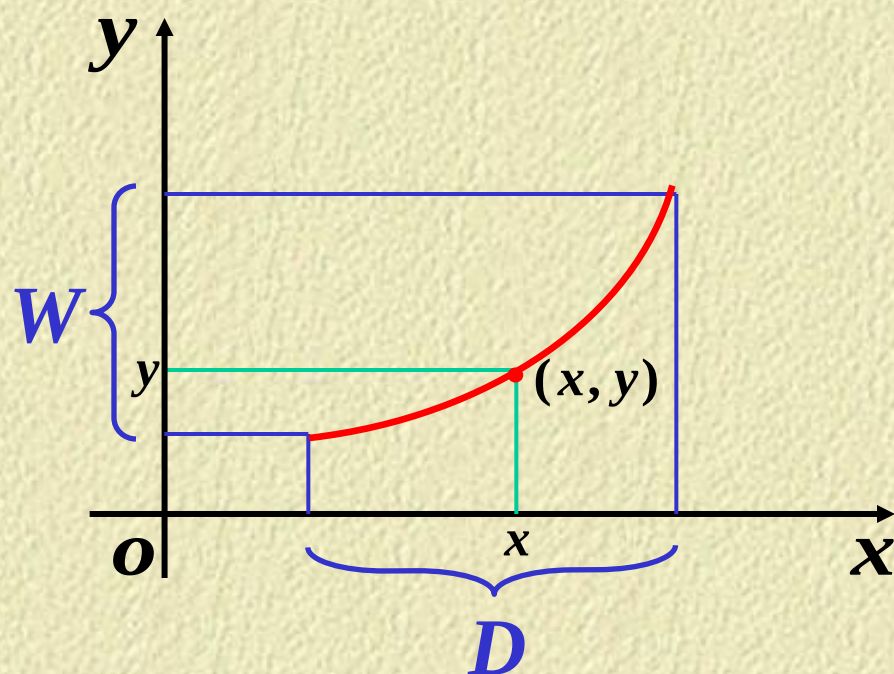
例如, $y = \sqrt{1-x^2}$ $D: [-1,1]$

例如, $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $D: (-1,1)$

如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值总是只有一个，这种函数叫做单值函数，否则叫与多值函数.

例如， $x^2 + y^2 = a^2$.

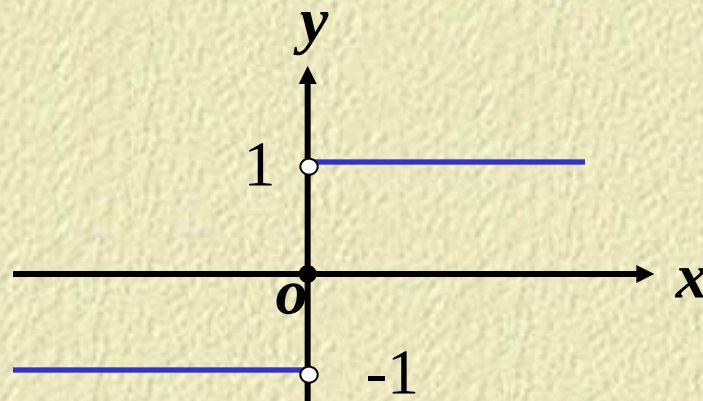
定义：点集 $C = \{(x, y) | y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的图形.



几个特殊的函数举例

(1) 符号函数

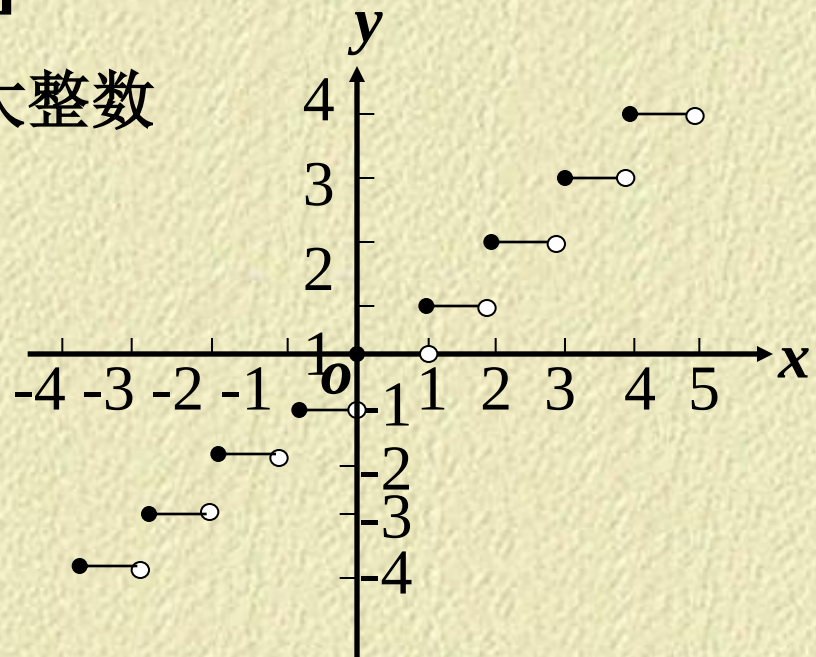
$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{当 } x > 0 \\ 0 & \text{当 } x = 0 \\ -1 & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$



$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$$

(2) 取整函数 $y=[x]$

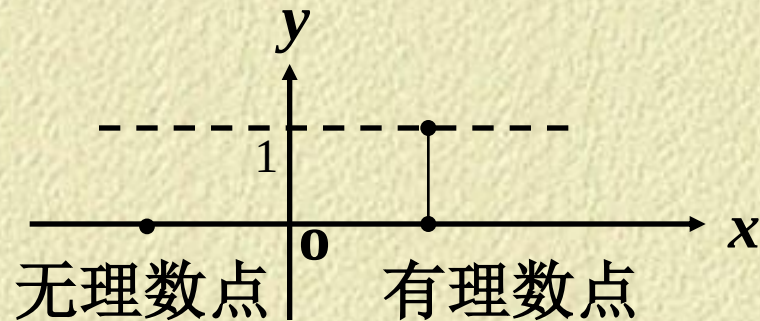
$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数



阶梯曲线

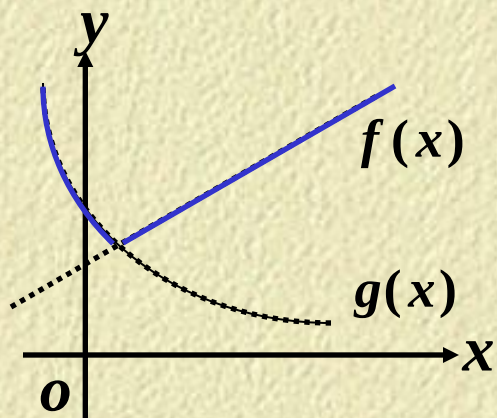
(3) 狄利克雷函数

$$y = D(x) = \begin{cases} 1 & \text{当} x \text{是有理数时} \\ 0 & \text{当} x \text{是无理数时} \end{cases}$$

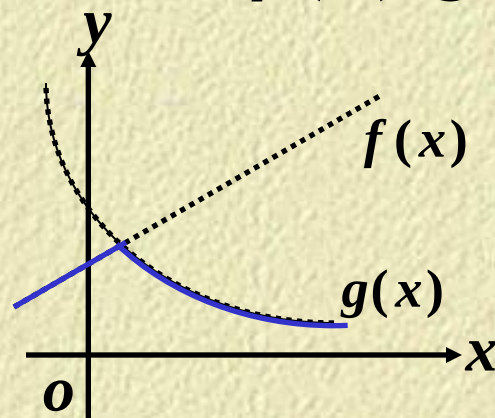


(4) 取最大值函数

$$y = \max\{f(x), g(x)\}$$

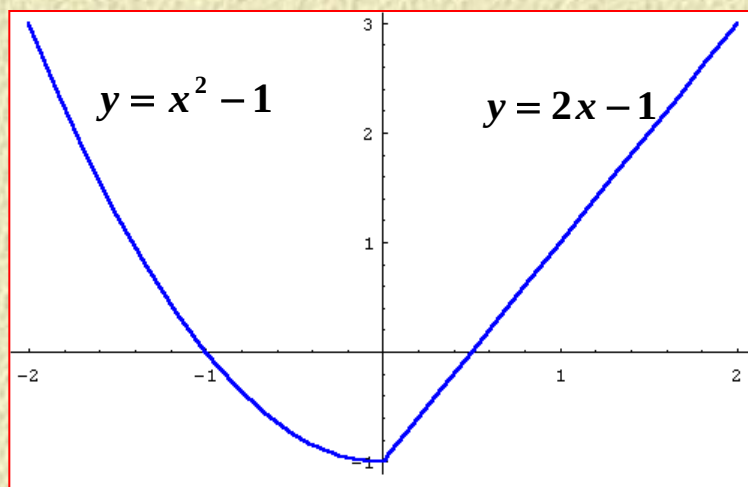


$$y = \min\{f(x), g(x)\}$$



在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同的式子来表示的函数,称为分段函数.

例如,
$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x > 0 \\ x^2 - 1, & x \leq 0 \end{cases}$$



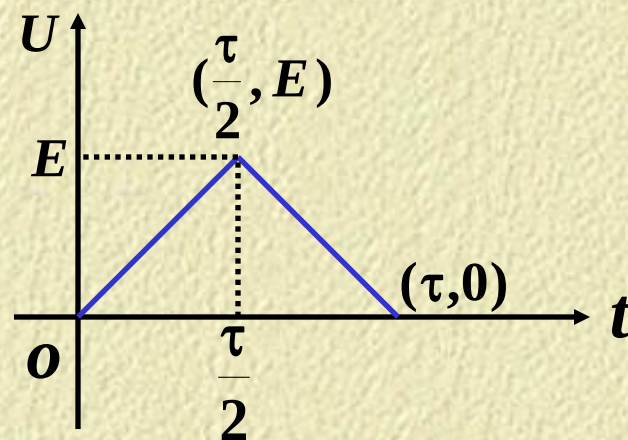
例1 脉冲发生器产生一个单三角脉冲,其波形如图所示,写出电压 U 与时间 $t(t \geq 0)$ 的函数关系式.

解 当 $t \in [0, \frac{\tau}{2}]$ 时,

$$U = \frac{E}{\frac{\tau}{2}} t = \frac{2E}{\tau} t;$$

当 $t \in (\frac{\tau}{2}, \tau]$ 时,

$$U - 0 = \frac{E - 0}{\frac{\tau}{2} - \tau} \cdot (t - \tau), \quad \text{即 } U = -\frac{2E}{\tau} (t - \tau)$$

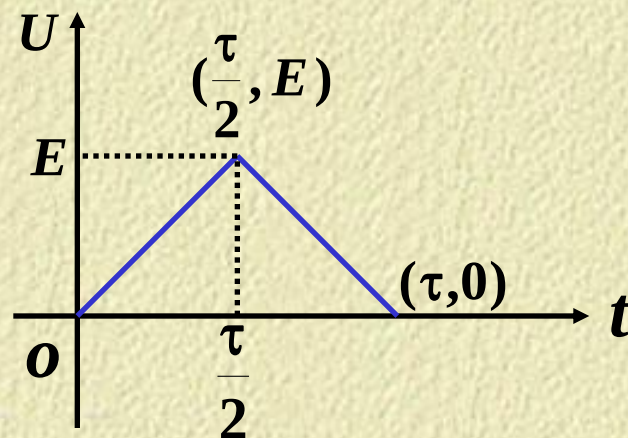


单三角脉冲信号的电压

当 $t \in (\tau, +\infty)$ 时, $U = 0$.

$\therefore U = U(t)$ 是一个分段函数,
其表达式为

$$U(t) = \begin{cases} \frac{2E}{\tau} t, & t \in [0, \frac{\tau}{2}] \\ -\frac{2E}{\tau} (t - \tau), & t \in (\frac{\tau}{2}, \tau] \\ 0, & t \in (\tau, +\infty) \end{cases}$$



例2

设 $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ -2 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$, 求函数 $f(x+3)$ 的定义域.

解 $\because f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ -2 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

$$\therefore f(x+3) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x+3 \leq 1 \\ -2 & 1 < x+3 \leq 2 \end{cases}$$

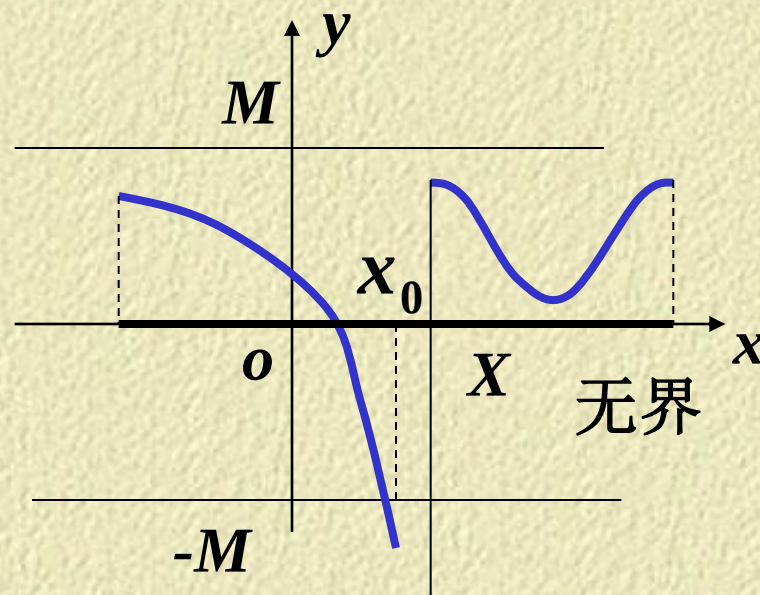
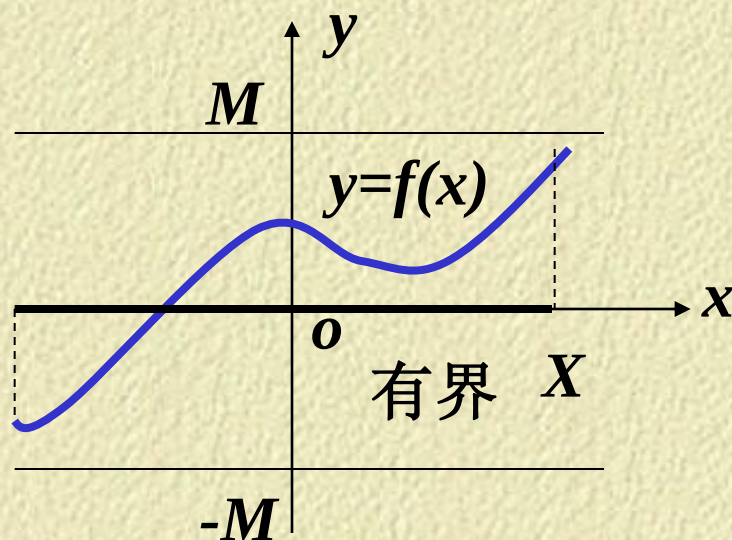
$$= \begin{cases} 1 & -3 \leq x \leq -2 \\ -2 & -2 < x \leq -1 \end{cases}$$

故 $D_f : [-3, -1]$

三、函数的特性

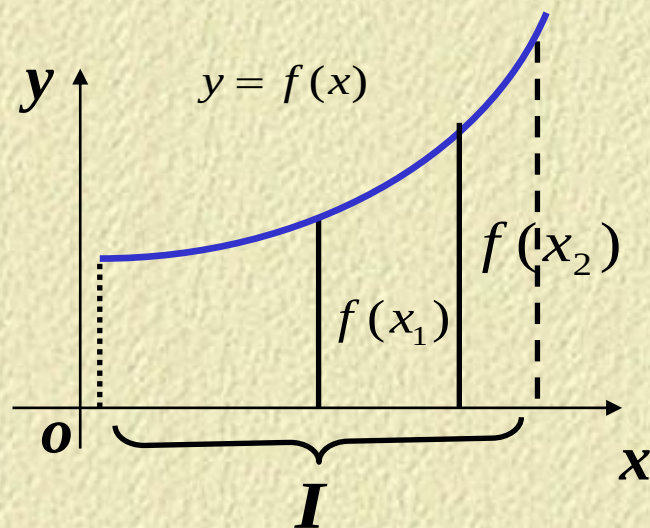
1. 函数的有界性:

若 $X \subset D, \exists M > 0, \forall x \in X, \text{有 } |f(x)| \leq M$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界. 否则称无界.

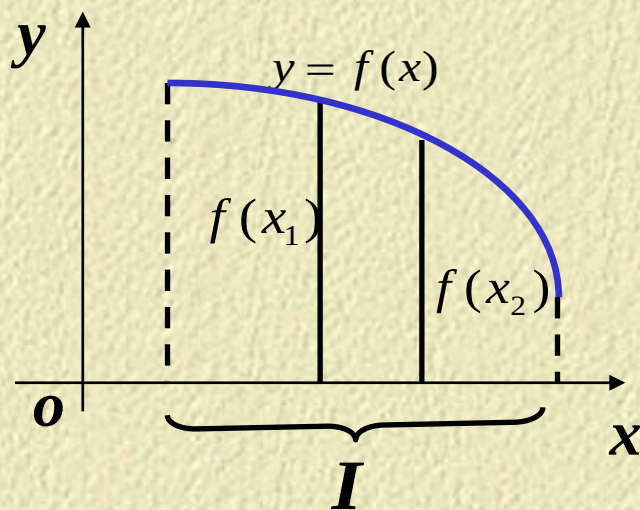


2. 函数的单调性:

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \in D$,
如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时,
恒有 (1) $f(x_1) < f(x_2)$,
则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的;

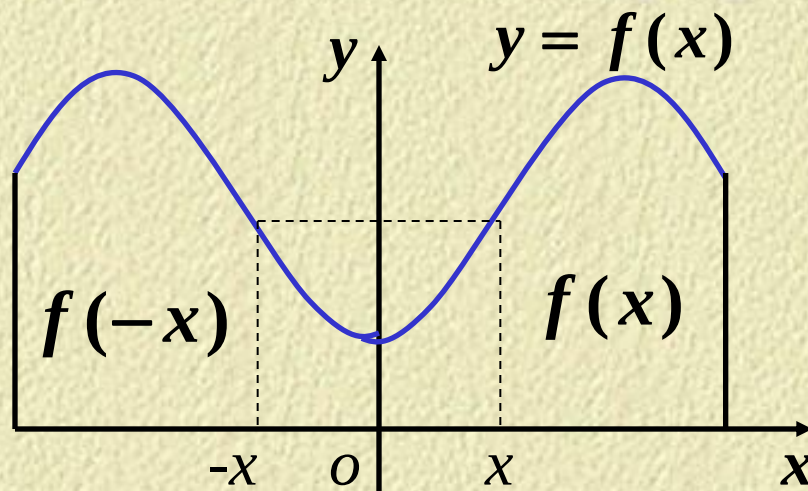


设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \in D$,
如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时,
恒有 (2) $f(x_1) > f(x_2)$,
则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的;



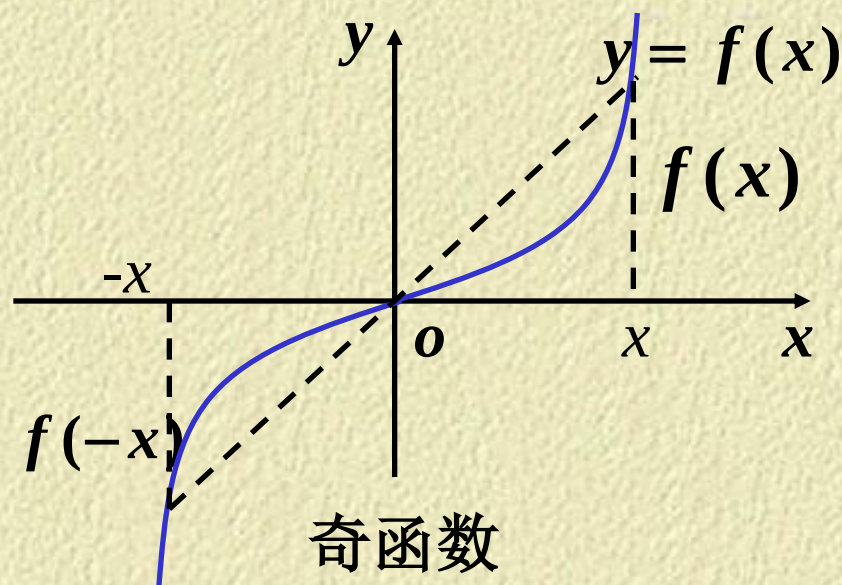
3. 函数的奇偶性:

设 D 关于原点对称, 对于 $\forall x \in D$, 有
 $f(-x) = f(x)$ 称 $f(x)$ 为偶函数;



偶函数

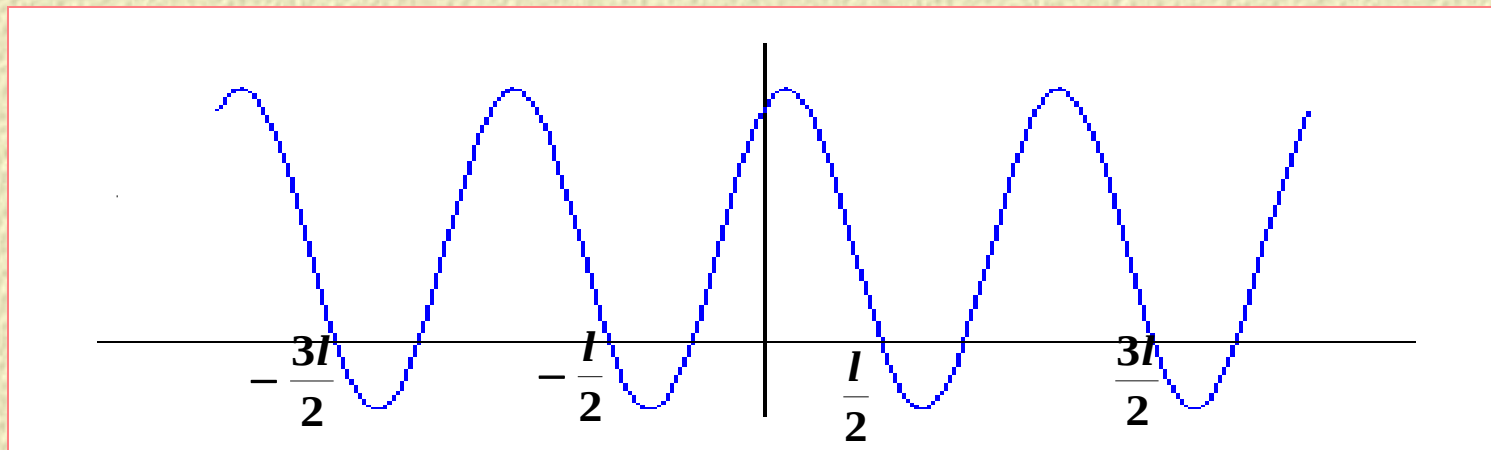
设 D 关于原点对称，对于 $\forall x \in D$ ，有
 $f(-x) = -f(x)$ 称 $f(x)$ 为奇函数；



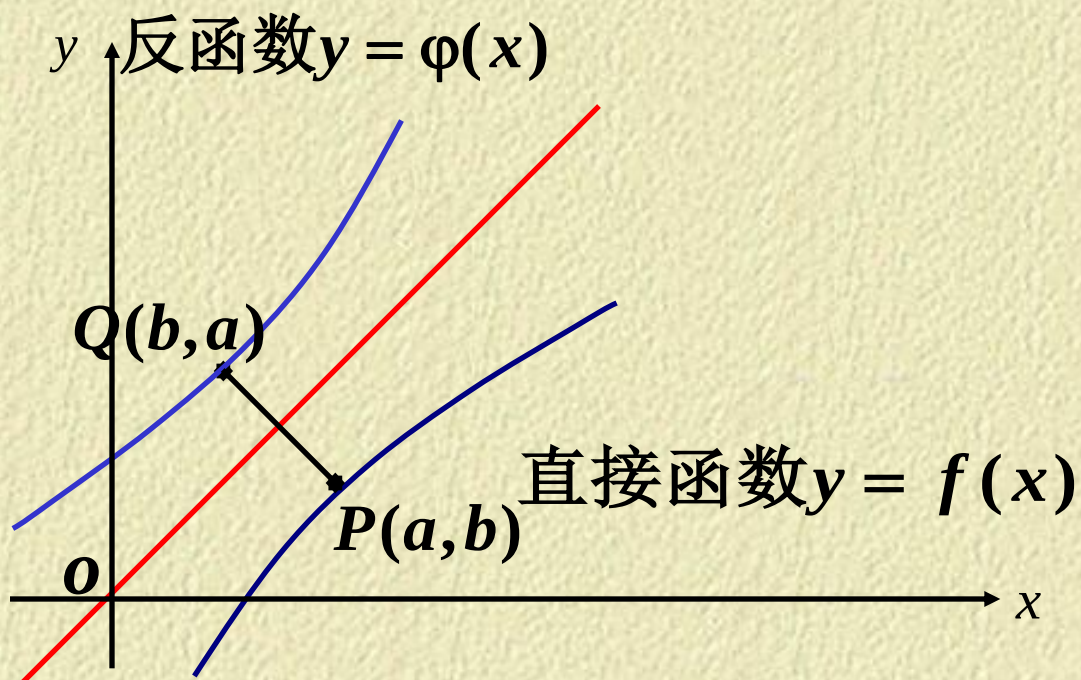
4. 函数的周期性:

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个不为零的数 l , 使得对于任一 $x \in D, (x \pm l) \in D$. 则称 $f(x)$ 为周期函数, l 称为 $f(x)$ 的周期. 且 $f(x+l) = f(x)$ 恒成立.

(通常说周期函数的周期是指其最小正[周期](#)).



四、反函数



直接函数与反函数的图形关于直线 $y = x$ 对称.

五、小结

基本概念

集合, 区间, 邻域, 常量与变量, 绝对值.

函数的概念

函数的特性

有界性, 单调性, 奇偶性, 周期性.

反函数

思考题

设 $\forall x > 0$ ，函数值 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1 + x^2}$ ，

求函数 $y = f(x)$ ($x > 0$) 的解析表达式.

思考题解答

设 $\frac{1}{x} = u$

则 $f(u) = \frac{1}{u} + \sqrt{1 + \frac{1}{u^2}} = \frac{1 + \sqrt{1 + u^2}}{u},$

故 $f(x) = \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}. \quad (x > 0)$

练习题

一、填空题：

1、若 $f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{5}{t} + 2t^2$, 则 $f(t) =$ _____ ,
 $f(t^2 + 1) =$ _____ .

2、若 $\phi(t) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \frac{\pi}{3} \\ |\sin x|, & |x| > \frac{\pi}{3} \end{cases}$,

则 $\phi\left(\frac{\pi}{6}\right) =$ _____ , $\phi\left(\frac{\pi}{3}\right) =$ _____ .

3、不等式 $|x - 5| < 1$ 的区间表示法是 _____ .

4、设 $y = x^2$, 要使 $x \in U(0, \delta)$ 时, $y \in U(0, 2)$,
须 δ _____ .

上页

下页

返回

二、证明 $y = \lg x$ 在 $(0, +\infty)$ 上的单调性.

三、证明任一定义在区间 $(-a, a)$ ($a > 0$) 上的函数可表示成一个奇函数与一个偶函数之和.

四、设 $f(x)$ 是以 2 为周期的函数,

且 $f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 < x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$, 试在 $(-\infty, +\infty)$ 上绘出

$f(x)$ 的图形.

五、证明: 两个偶函数的乘积是偶函数, 两个奇函数的乘积是偶函数, 偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

六、证明函数 $y = \frac{ax - b}{cx - a}$ 的反函数是其本身.

七、求 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ 的反函数, 并指出其定义域.

练习题答案

- 一、 1、 $5t + \frac{2}{t^2}, 5(t^2 + 1) + \frac{2}{(t^2 + 1)^2}$; 2、 1, 1;
3、 (4, 6); 4. $\in (0, \sqrt{2}]$.
七、 $y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, (-1, 1)$.

第二节 初等函数

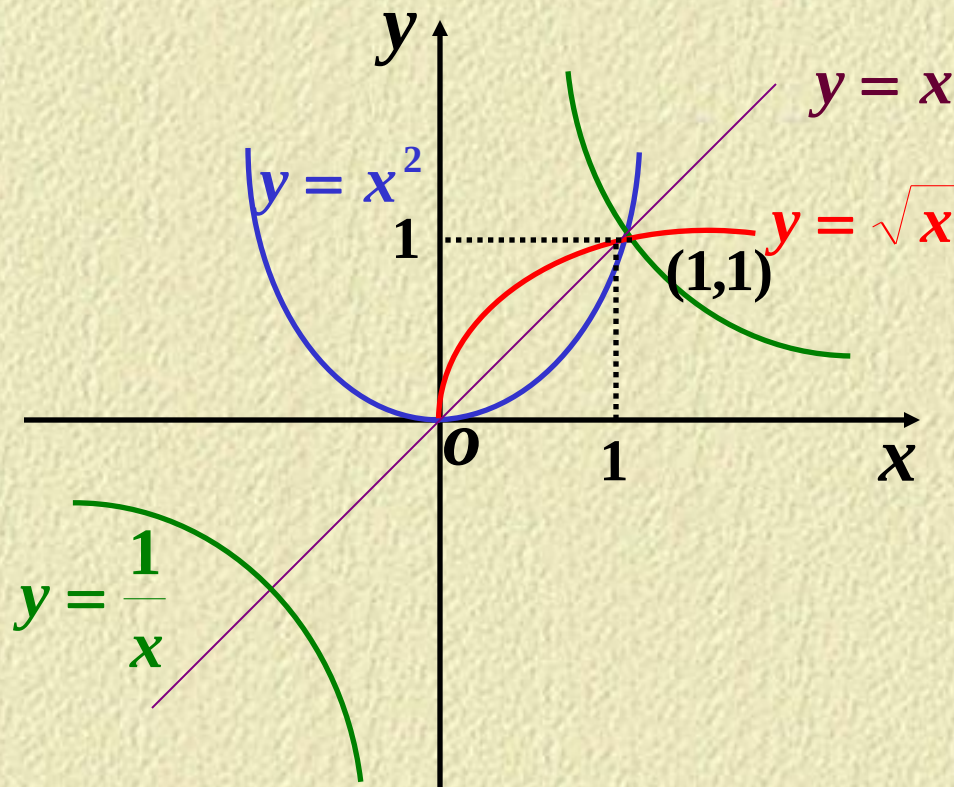
-  一、基本初等函数
-  二、复合函数 初等函数
-  三、双曲函数与反双曲函数
-  四、小结 思考题

帮助

返回

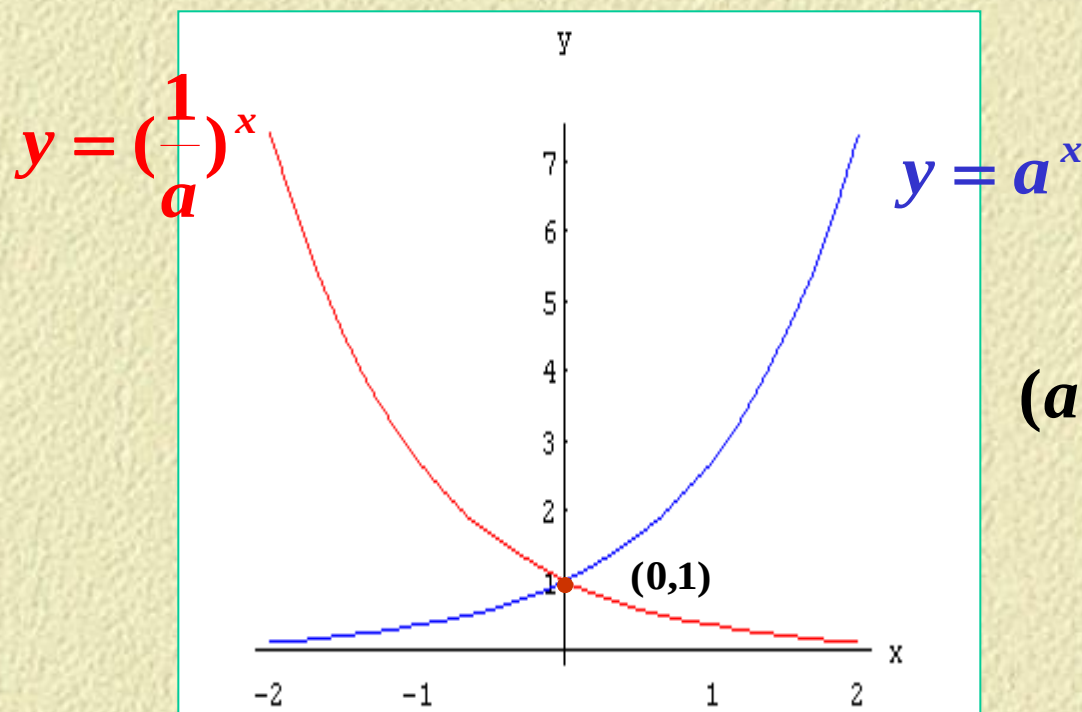
一、基本初等函数

1. 幂函数 $y = x^\mu$ (μ 是常数)



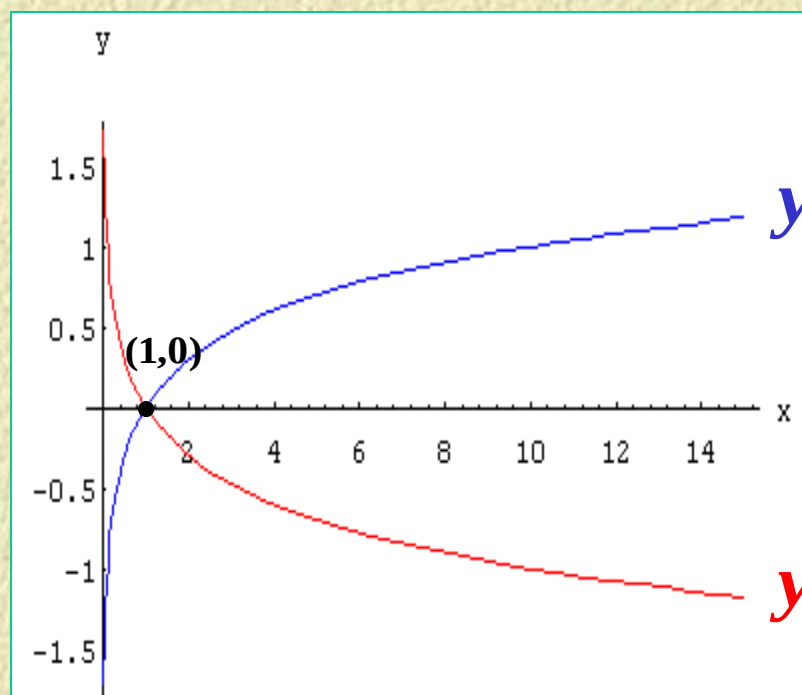
2. 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)

$$y = e^x$$



($a > 1$)

3.对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) $y = \ln x$



$$y = \log_a x$$

$$(a > 1)$$

$$y = \log_{\frac{1}{a}} x$$

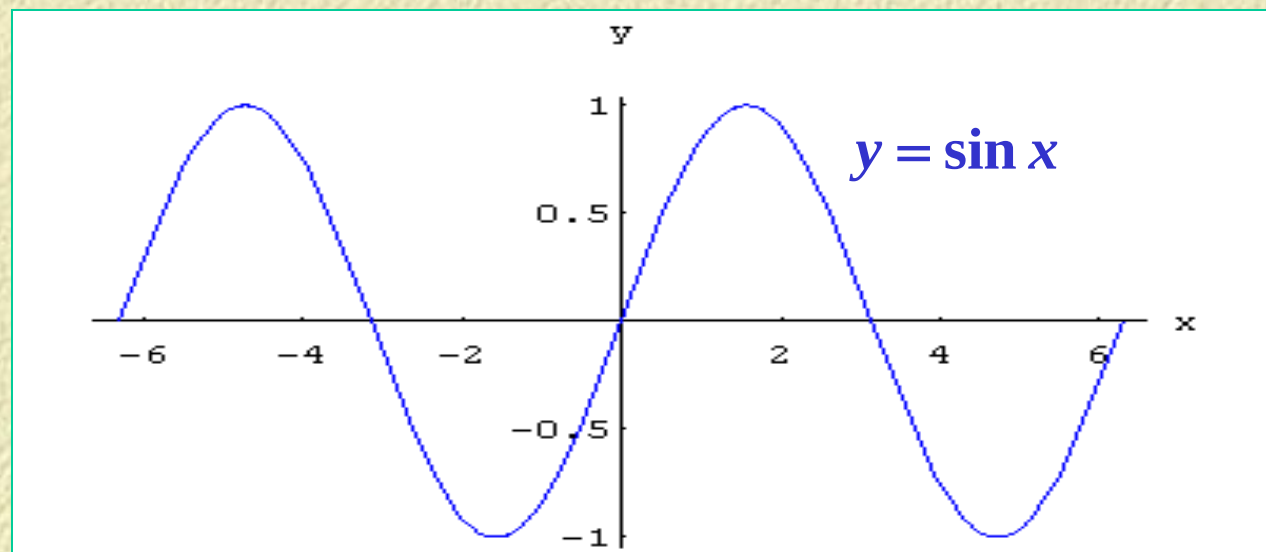
上页

下页

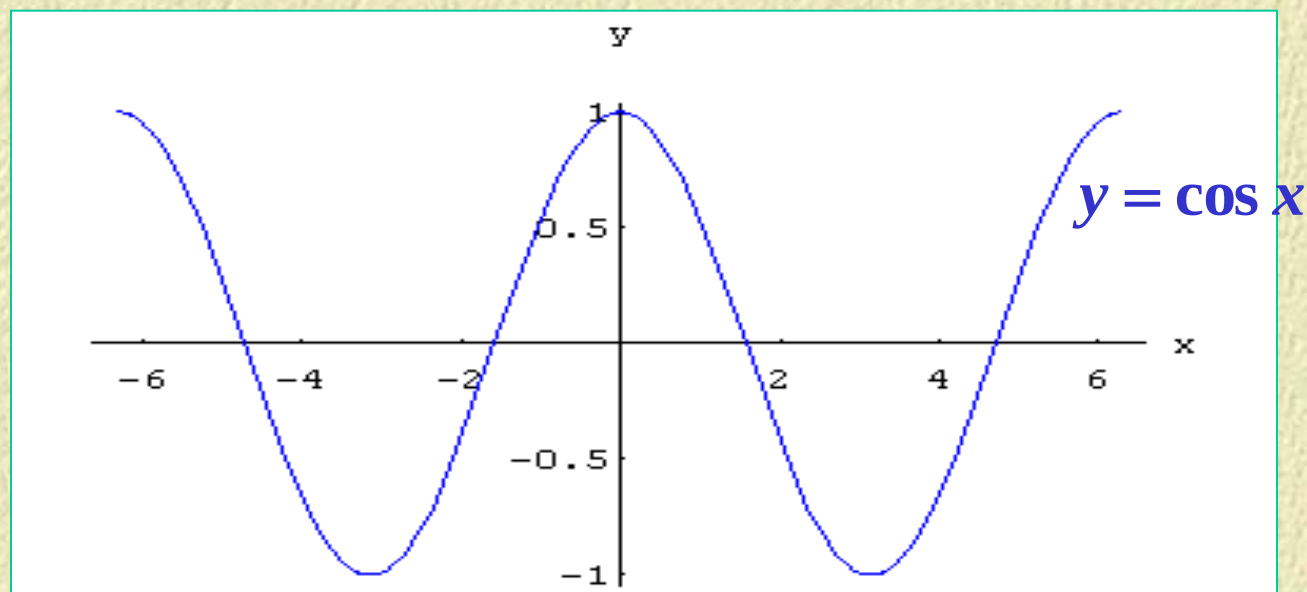
返回

4.三角函数

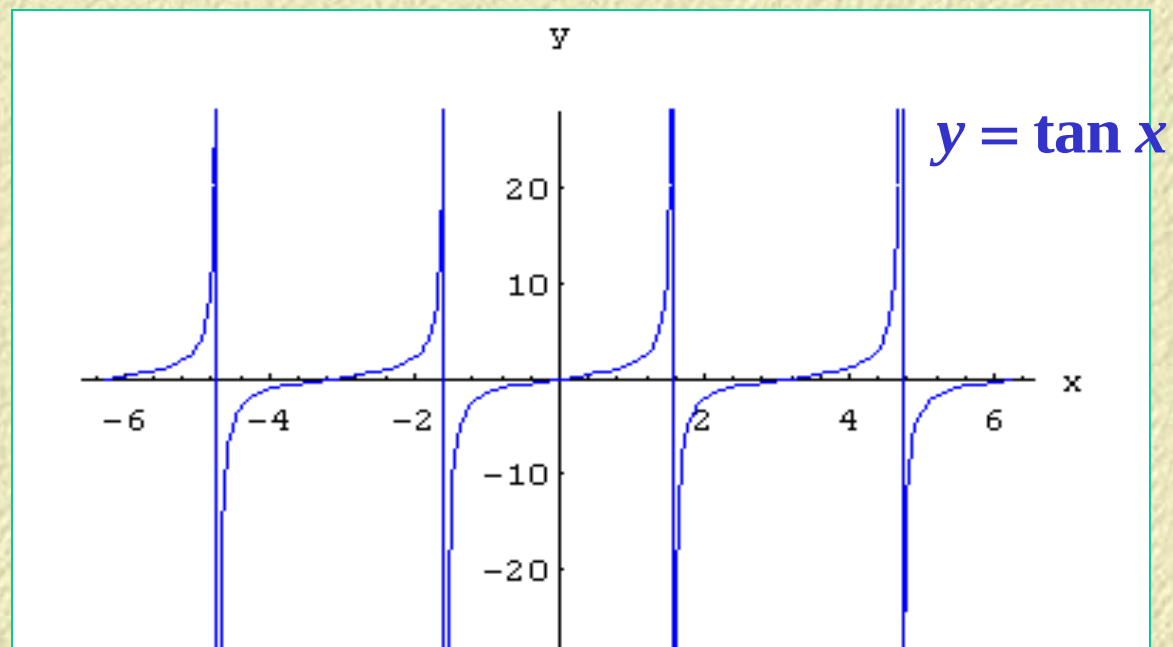
正弦函数 $y = \sin x$



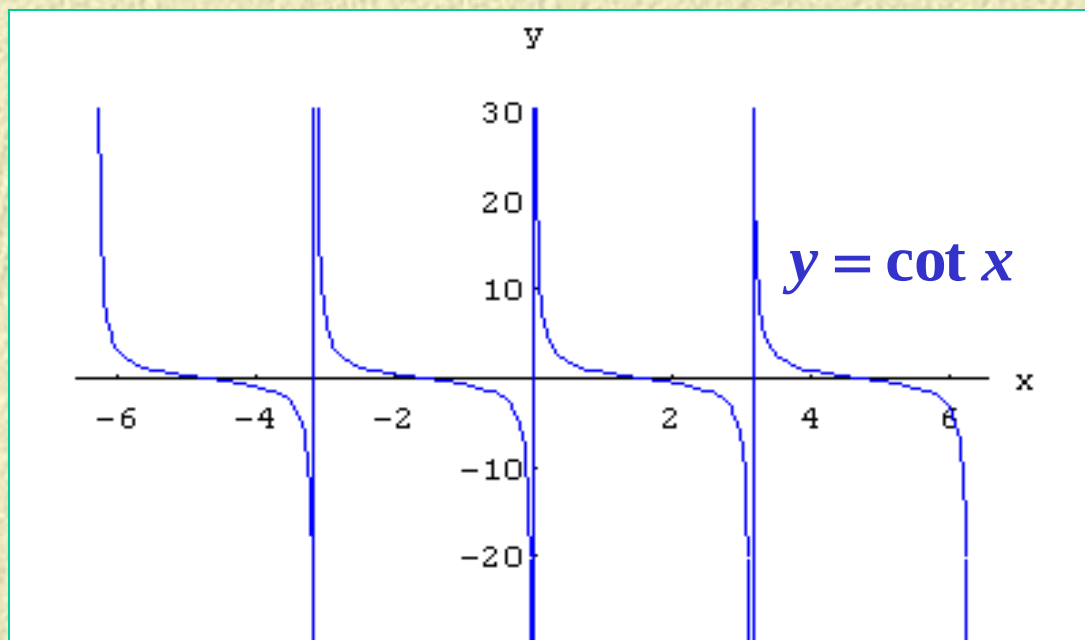
余弦函数 $y = \cos x$



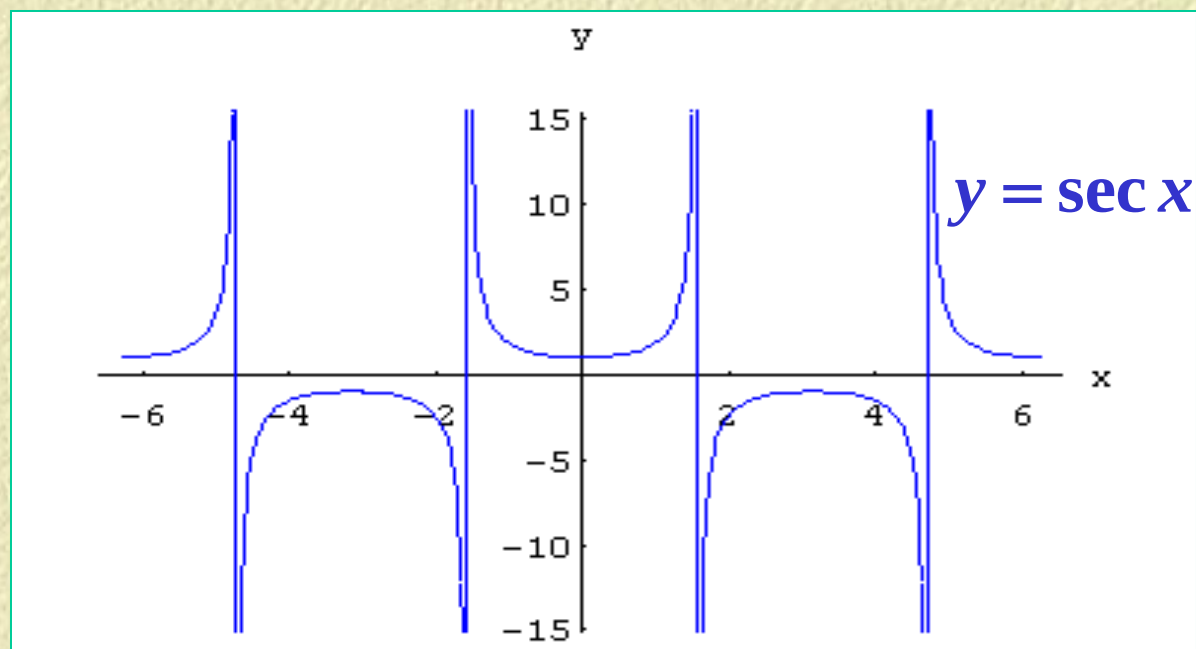
正切函数 $y = \tan x$



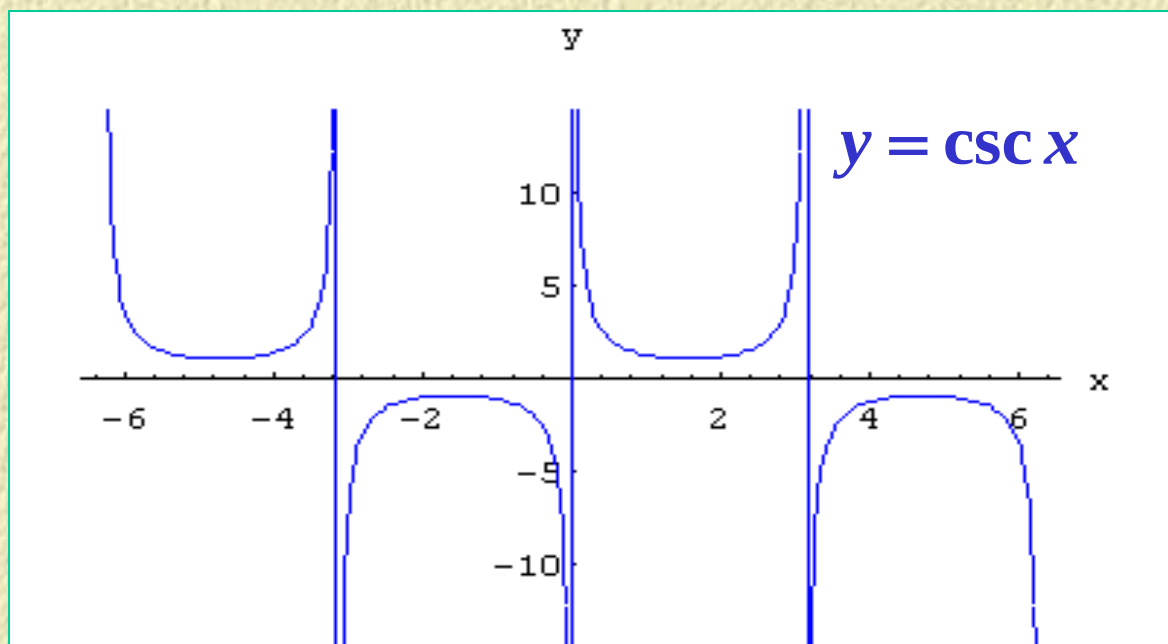
余切函数 $y = \cot x$



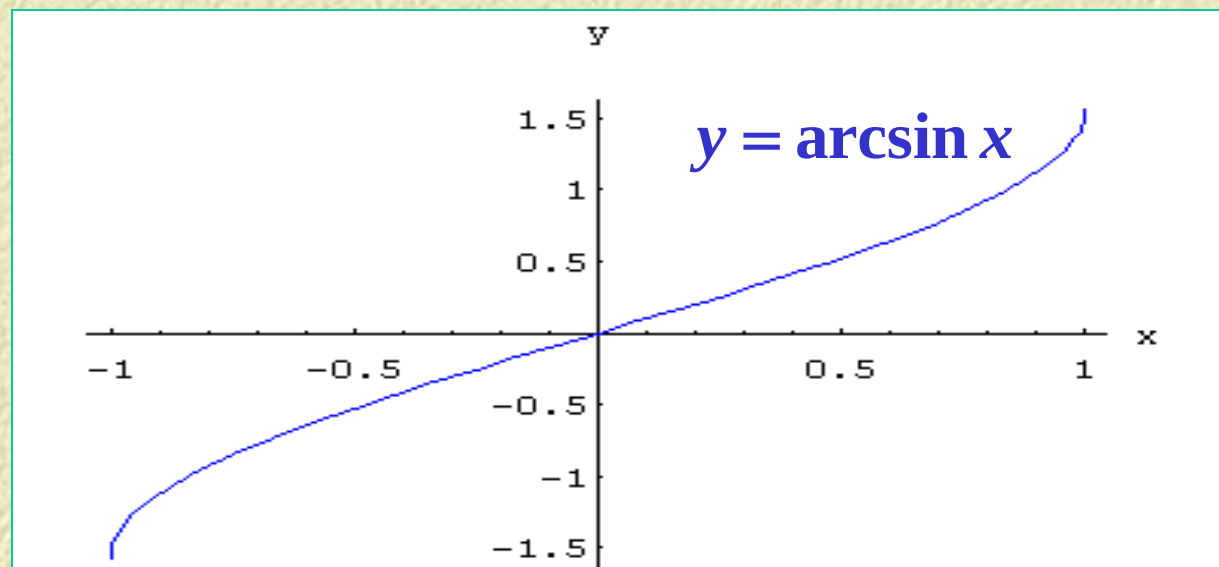
正割函数 $y = \sec x$



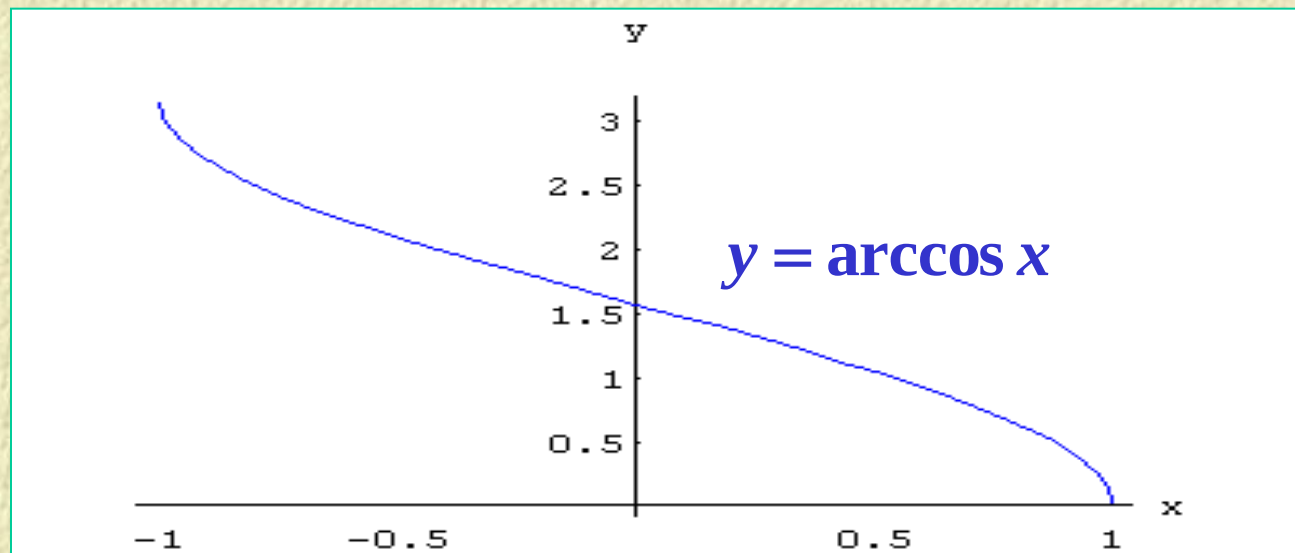
余割函数 $y = \text{CSC } x$



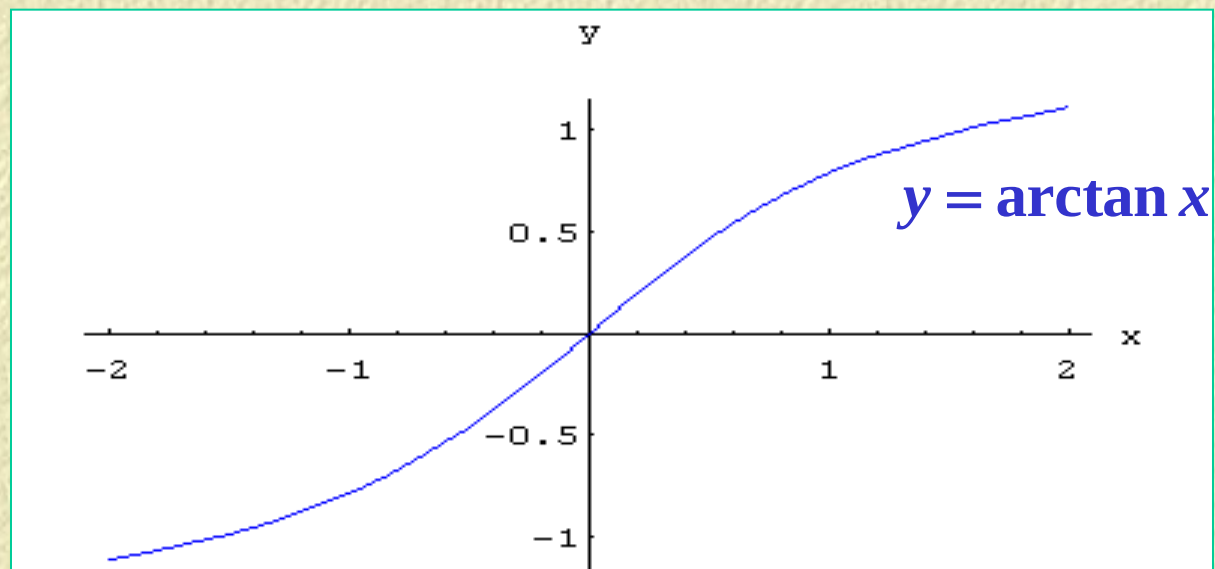
5.反三角函数 反正弦函数 $y = \arcsin x$



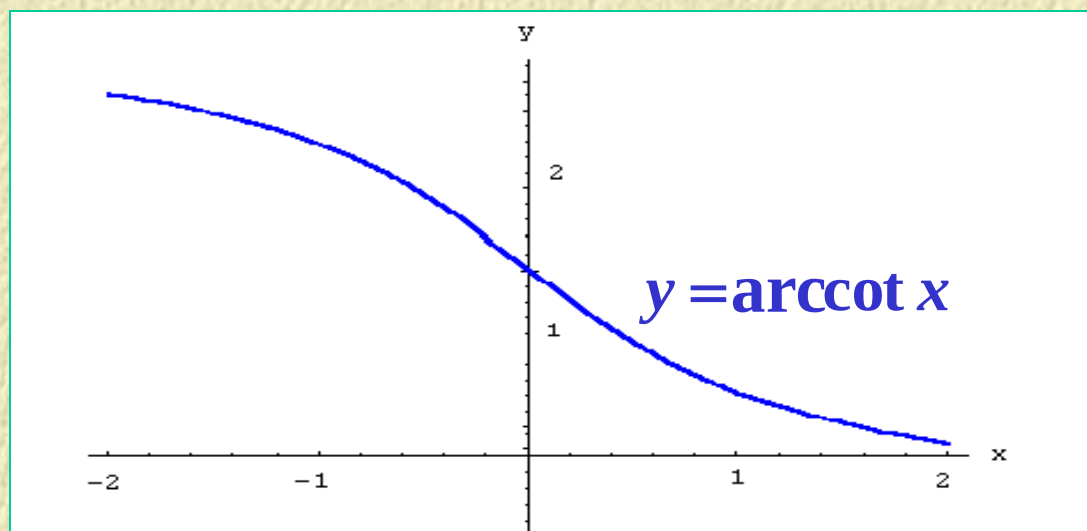
反余弦函数 $y = \arccos x$



反正切函数 $y = \arctan x$



反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$



幂函数,指数函数,对数函数,三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

二、复合函数 初等函数

1. 复合函数

设 $y = \sqrt{u}$, $u = 1 - x^2$, $\longrightarrow y = \sqrt{1 - x^2}$

定义： 设函数 $y = f(u)$ 的定义域 D_f ，而函数 $u = \varphi(x)$ 的值域为 Z_φ ，若 $D_f \cap Z_\varphi \neq \emptyset$ ，则称函数 $y = f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数。

$x \leftarrow$ 自变量, $u \leftarrow$ 中间变量, $y \leftarrow$ 因变量,

注意: 1.不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的;

例如 $y = \arcsin u$, $u = 2 + x^2$; $y \neq \arcsin(2 + x^2)$

2.复合函数可以由两个以上的函数经过复合构成.

例如 $y = \sqrt{\cot \frac{x}{2}}$, $y = \sqrt{u}$, $u = \cot v$, $v = \frac{x}{2}$.

2.初等函数 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数,称为初等函数.

例1 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}, \varphi(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 0 \\ x^2 - 1, & x \geq 0 \end{cases}$,

求 $f[\varphi(x)]$.

解 $f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{\varphi(x)}, & \varphi(x) < 1 \\ \varphi(x), & \varphi(x) \geq 1 \end{cases}$

1⁰ 当 $\varphi(x) < 1$ 时,

或 $x < 0, \varphi(x) = x + 2 < 1, \longrightarrow x < -1;$

或 $x \geq 0, \varphi(x) = x^2 - 1 < 1, \longrightarrow 0 \leq x < \sqrt{2};$

2⁰ 当 $\varphi(x) \geq 1$ 时,

或 $x < 0$, $\varphi(x) = x + 2 \geq 1$, $\longrightarrow -1 \leq x < 0$;

或 $x \geq 0$, $\varphi(x) = x^2 - 1 \geq 1$, $\longrightarrow x \geq \sqrt{2}$;

综上所述

$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{x+2}, & x < -1 \\ x + 2, & -1 \leq x < 0 \\ e^{x^2-1}, & 0 \leq x < \sqrt{2} \\ x^2 - 1, & x \geq \sqrt{2} \end{cases}.$$

三、双曲函数与反双曲函数

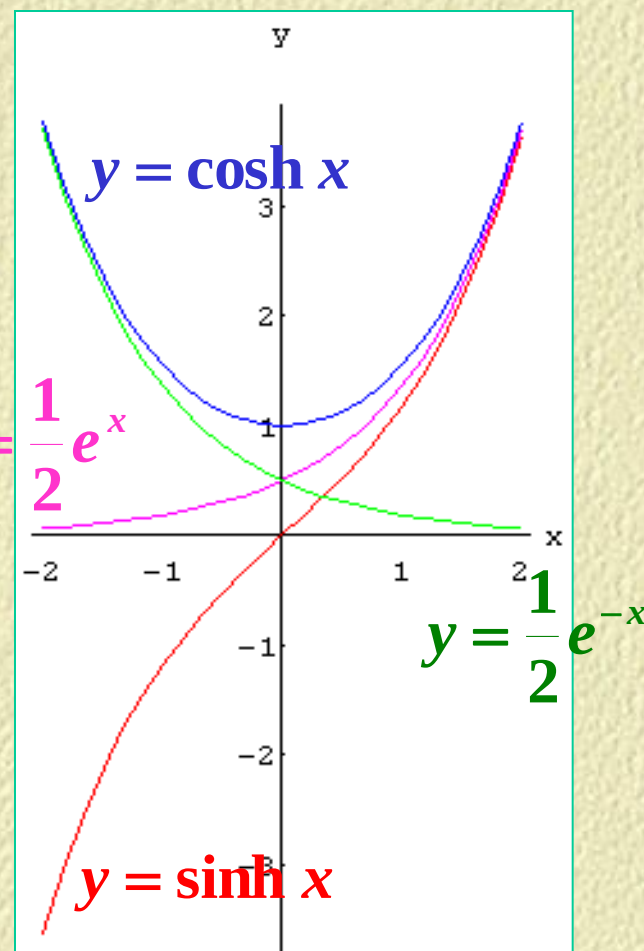
1. 双曲函数

双曲正弦 $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$D: (-\infty, +\infty)$, 奇函数.

双曲余弦 $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$D: (-\infty, +\infty)$, 偶函数.



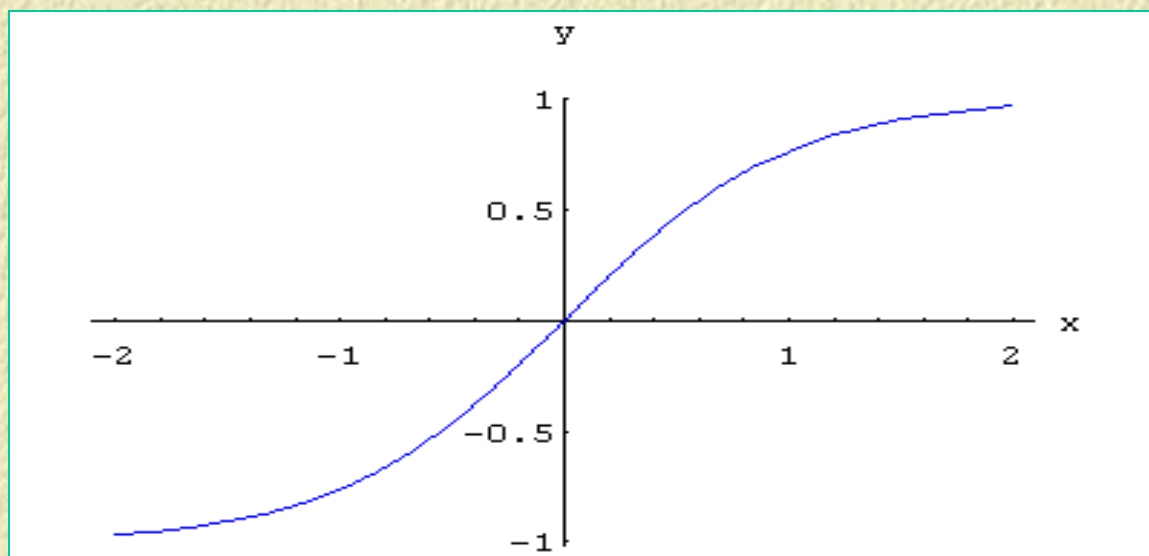
上页

下页

返回

双曲正切 $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$D: (-\infty, +\infty)$ 奇函数, 有界函数,



双曲函数常用公式

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y;$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y;$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1;$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x;$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x.$$

2.反双曲函数

反双曲正弦 $y = \operatorname{arsinh} x$;

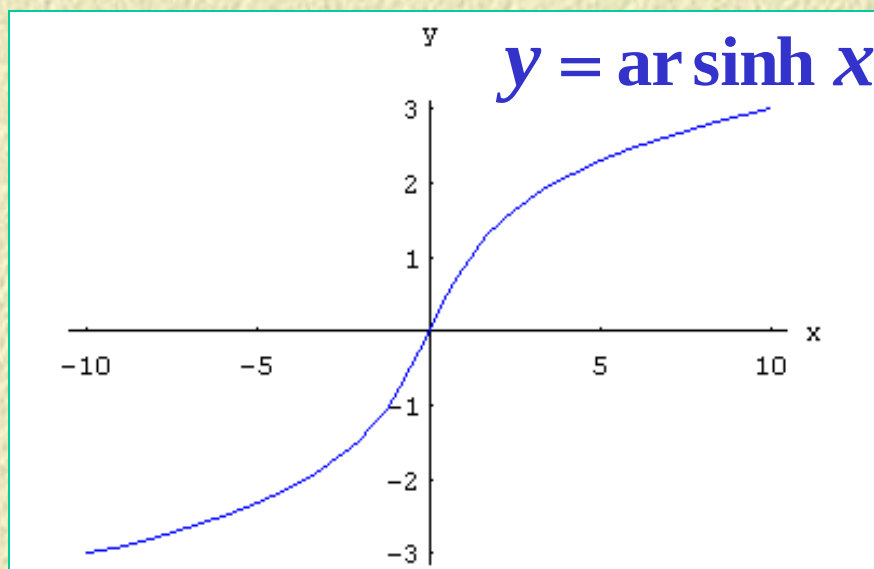
$$y = \operatorname{arsinh} x$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

$$D : (-\infty, +\infty)$$

奇函数,

在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加.

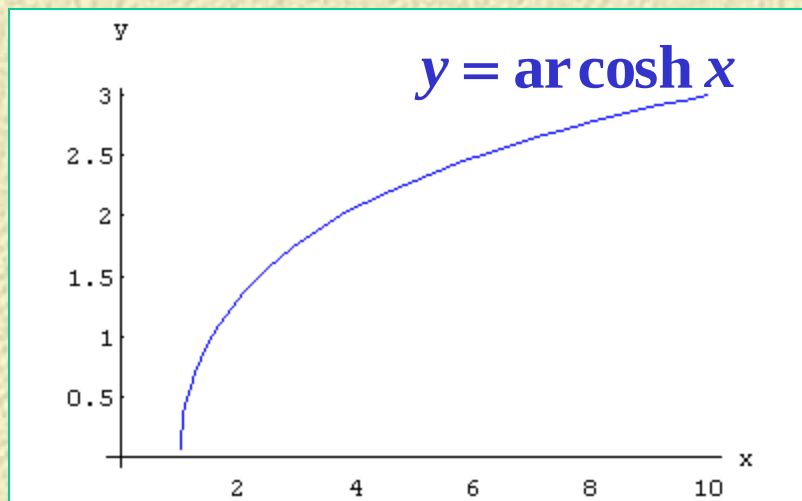


反双曲余弦 $y = \operatorname{ar} \cosh x$

$$y = \operatorname{arcosh} x \\ = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

$$D: [1, +\infty)$$

在 $[1, +\infty)$ 内单调增加.



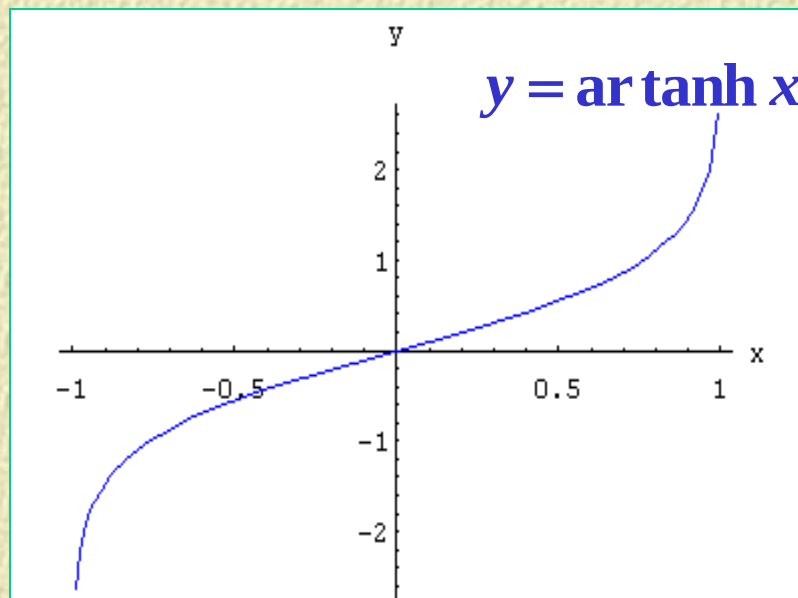
反双曲正切 $y = \operatorname{ar} \tanh x$

$$y = \operatorname{artanh} x \\ = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

$D: (-1, 1)$

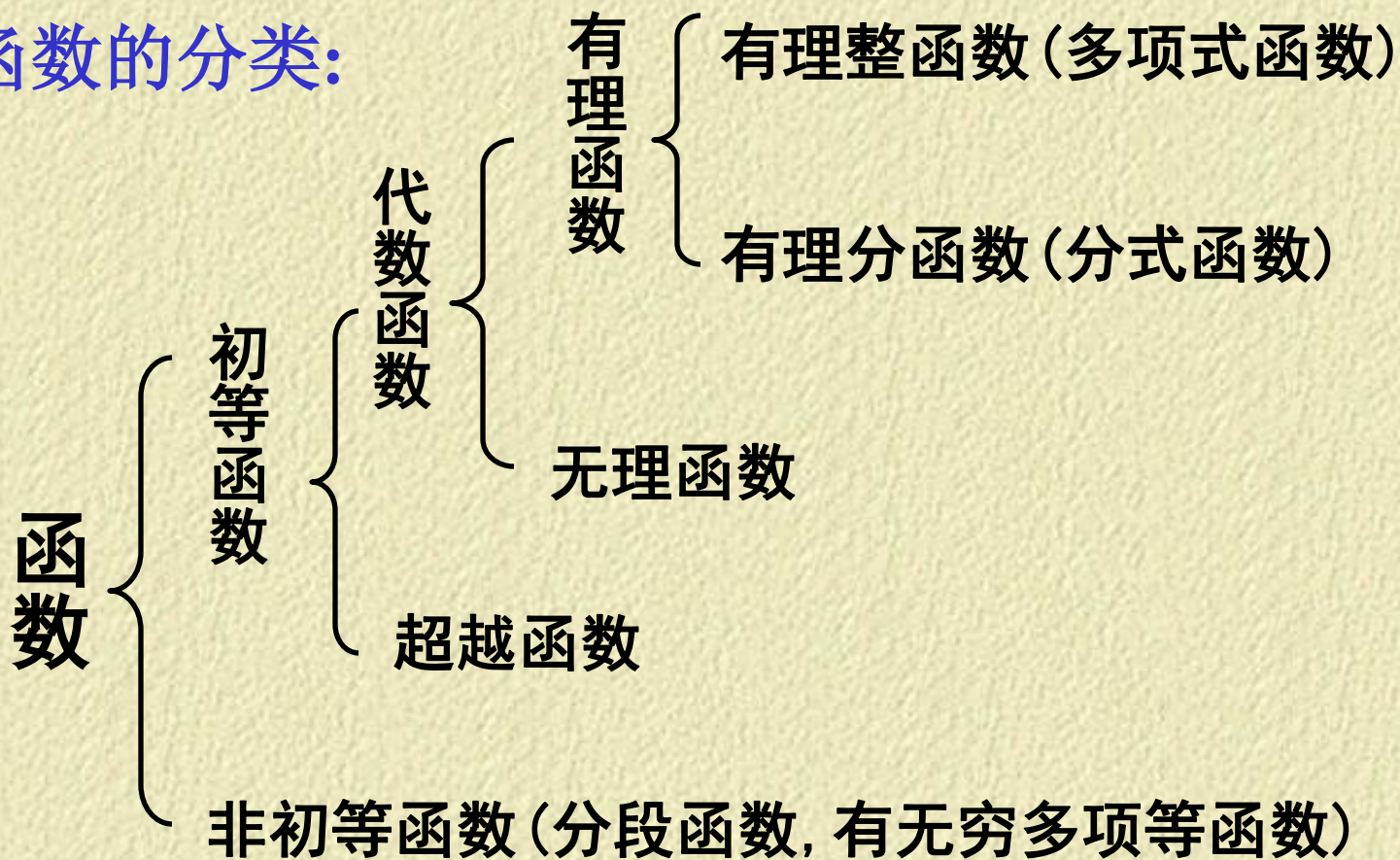
奇函数,

在 $(-1, 1)$ 内单调增加.



四、小结

函数的分类:



思考题

下列函数能否复合为函数 $y = f[g(x)]$,
若能, 写出其解析式、定义域、值域.

$$(1) \quad y = f(u) = \sqrt{u}, \quad u = g(x) = x - x^2$$

$$(2) \quad y = f(u) = \ln u, \quad u = g(x) = \sin x - 1$$

思考题解答

$$(1) \quad y = f[g(x)] = \sqrt{x - x^2}$$

$$x \in D = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}, \quad f(D) = [0, \frac{1}{2}]$$

$$(2) \quad \text{不能.} \quad \because \quad g(x) = \sin x - 1 \leq 0$$

$g(x)$ 的值域与 $f(u)$ 的定义域之交集是空集.

练 习 题

一、填空题:

- 1、幂函数，指数函数，对数函数，三角函数和反三角函数统称_____.
- 2、函数 $f(x)$ 的定义域为 $[1, 3]$ ，则函数 $f(\ln x)$ 的定义域为_____.
- 3、由函数 $y = e^u$ ， $u = x^2$ 复合而成的函数为_____.
- 4、函数 $y = \sin \ln 2x$ 由_____复合而成.
- 5、若 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$ ，则 $f(x^2)$ 的定义域为_____， $f(\sin x)$ 的定义域为_____， $f(x+a)(a > 0)$ 的定义域为_____， $f(x+a) + f(x-a)(a > 0)$ 的定义域为_____.

二、应用图形的“叠加”作函数 $y = x + \sin x$ 的图形.

三、设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| = 1 \\ -1, & |x| > 1 \end{cases}$, $g(x) = e^x$,

求 $f[g(x)]$, $g[f(x)]$, 并作出它们的图形.

四、火车站行李收费规定如下: 20 千克以下不计费, 20~50 千克每千克收费 0.20 元, 超出 50 千克超出部分每千克 0.30 元, 试建立行李收费 $f(x)$ (元) 于行李重量 x (千克) 之间的函数关系, 并作出图形.

练习题答案

- 一、 1、基本初等函数； 2、 $[e, e^3]$ ；
3、 $y = e^{x^2}$ ； 4、 $y = \sin u, u = \ln v, v = 2x$ ；
5、 $[-1, 1], [2k\pi, 2k\pi + \pi], [-a, 1-a],$

$$\begin{cases} [a, 1-a] & 0 < a \leq \frac{1}{2} \\ \phi & a > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{三、 } f[g(x)] = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases} ; \quad g[f(x)] = \begin{cases} e, & |x| < 1 \\ 1, & |x| = 1 \\ \frac{1}{e}, & |x| > 1 \end{cases}.$$

四、 $y = \begin{cases} 0 & x < 20 \\ 0.2x, 20 \leq x \leq 50 \\ 10 + 0.3(x - 50), x > 50 \end{cases}$

第三节 数列的极限



一、概念的引入



二、数列的定义



三、数列的极限



四、数列极限的性质



五、小结 思考题

帮助

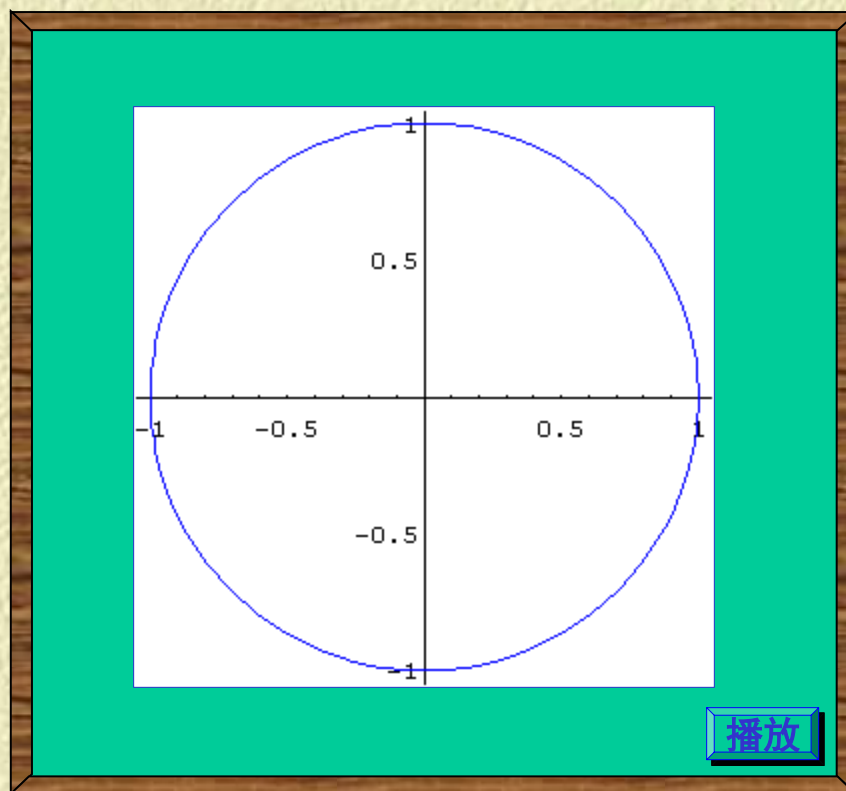
返回

一、概念的引入

1、割圆术：

“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”

——刘徽



上页

下页

返回

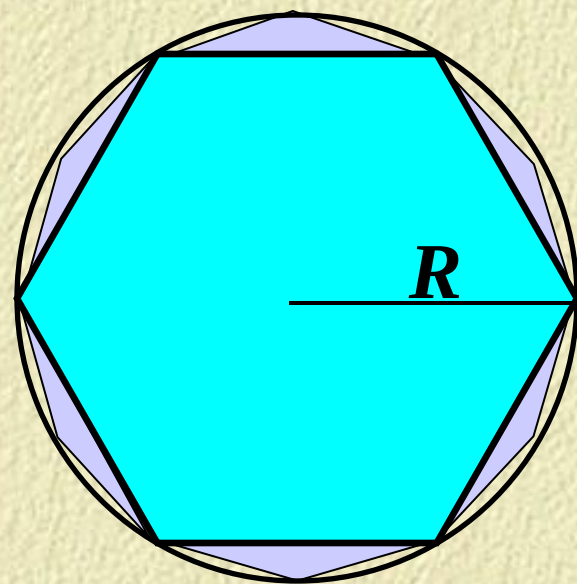
正六边形的面积 A_1

正十二边形的面积 A_2

.....

正 $6 \times 2^{n-1}$ 形的面积 A_n

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots \rightarrow S$



2、截丈问题：

“一尺之棰，日截其半，万世不竭”

第一天截下的杖长为 $X_1 = \frac{1}{2}$;

第二天截下的杖长总和为 $X_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$;

.....

第 n 天截下的杖长总和为 $X_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$;

$$X_n = 1 - \frac{1}{2^n} \longrightarrow 1$$

二、数列的定义

定义:按自然数 $1,2,3,\cdots$ 编号依次排列的一系列数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots \quad (1)$$

称为无穷数列,简称数列.其中的每个数称为数列的项, x_n 称为通项(一般项).数列(1)记为 $\{x_n\}$.

例如 $2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots; \quad \{2^n\}$

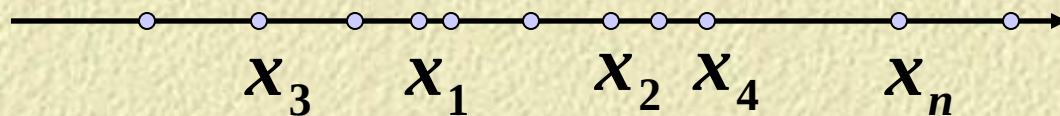
$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots; \quad \left\{\frac{1}{2^n}\right\}$$

$$1, -1, 1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots; \quad \{(-1)^{n-1}\}$$

$$2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n + (-1)^{n-1}}{n}, \dots; \quad \left\{ \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} \right\}$$

$$\sqrt{3}, \sqrt{3 + \sqrt{3}}, \dots, \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{\dots + \sqrt{3}}}}, \dots$$

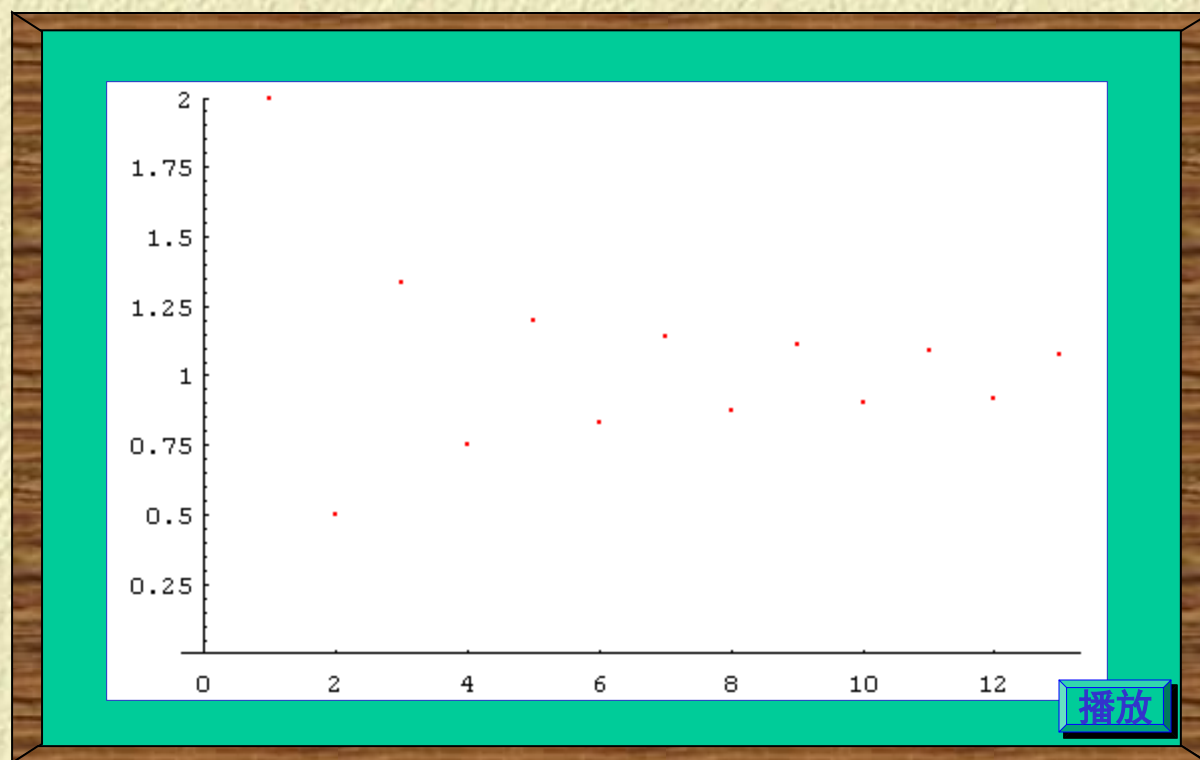
注意: 1. 数列对应着数轴上一个点列. 可看作一动点在数轴上依次取 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$.



2. 数列是整标函数 $x_n = f(n)$.

三、数列的极限

观察数列 $\{1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时的变化趋势.



问题：当 n 无限增大时, x_n 是否无限接近于某一确定的数值?如果是,如何确定?

通过上面演示实验的观察:

当 n 无限增大时, $x_n = 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 无限接近于 1.

问题：“无限接近”意味着什么?如何用数学语言刻划它.

$$\because |x_n - 1| = \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n}$$

给定 $\frac{1}{100}$, 由 $\frac{1}{n} < \frac{1}{100}$, 只要 $n > 100$ 时, 有 $|x_n - 1| < \frac{1}{100}$,

给定 $\frac{1}{1000}$, 只要 $n > 1000$ 时, 有 $|x_n - 1| < \frac{1}{1000}$,

给定 $\frac{1}{10000}$, 只要 $n > 10000$ 时, 有 $|x_n - 1| < \frac{1}{10000}$,

给定 $\varepsilon > 0$, 只要 $n > N(= [\frac{1}{\varepsilon}])$ 时, 有 $|x_n - 1| < \varepsilon$ 成立.

定义 如果对于任意给定的正数 ε (不论它多么小), 总存在正数 N , 使得对于 $n > N$ 时的一切 x_n , 不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 都成立, 那末就称常数 a 是数列 x_n 的极限, 或者称数列 x_n 收敛于 a , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \text{或} \quad x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty).$$

如果数列没有极限,就说数列是发散的.

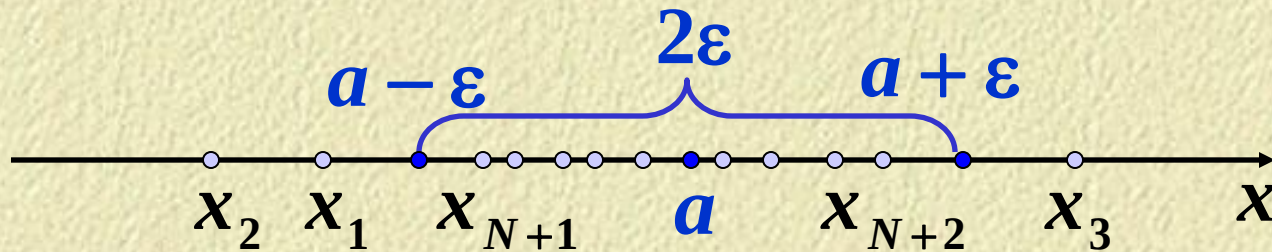
注意: 1. 不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 刻划了 x_n 与 a 的无限接近;
2. N 与任意给定的正数 ε 有关.

$\varepsilon - N$ 定义: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 使 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$.

其中 $\forall$: 每一个或任给的; $\exists$: 至少有一个或存在.

几何解释:



当 $n > N$ 时, 所有的点 x_n 都落在 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 内,
只有有限个 (至多只有 N 个) 落在其外.

注意：数列极限的定义未给出求极限的方法.

例1 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} = 1$.

证 $|x_n - 1| = \left| \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n}$

任给 $\varepsilon > 0$, 要 $|x_n - 1| < \varepsilon$, 只要 $\frac{1}{n} < \varepsilon$, 或 $n > \frac{1}{\varepsilon}$,

所以, 取 $N = [\frac{1}{\varepsilon}]$, 则当 $n > N$ 时,

就有 $\left| \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} - 1 \right| < \varepsilon$ 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} = 1$.

例2 设 $x_n \equiv C$ (C 为常数), 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = C$.

证 任给 $\varepsilon > 0$, 对于一切自然数 n ,

$$|x_n - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon \text{ 成立,}$$

所以, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = C$.

说明: 常数列的极限等于同一常数.

小结: 用定义证数列极限存在时, 关键是任意给定 $\varepsilon > 0$, 寻找 N , 但不必要求最小的 N .

例3 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, 其中 $|q| < 1$.

证 任给 $\varepsilon > 0$, 若 $q = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$;

若 $0 < |q| < 1$, $|x_n - 0| = |q^n| < \varepsilon$, $n \ln|q| < \ln \varepsilon$,

$\therefore n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln|q|}$, 取 $N = [\frac{\ln \varepsilon}{\ln|q|}]$, 则当 $n > N$ 时,

就有 $|q^n - 0| < \varepsilon$, $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

例4 设 $x_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a > 0$,

求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

证 任给 $\varepsilon > 0$, $\because \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$,

$\therefore \exists N$ 使得当 $n > N$ 时恒有 $|x_n - a| < \varepsilon_1$,

$$\text{从而有 } \left| \sqrt{x_n} - \sqrt{a} \right| = \frac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} < \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{a}} = \varepsilon$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

四、数列极限的性质

1.有界性

定义：对数列 x_n ，若存在正数 M ，使得一切自然数 n ，恒有 $|x_n| \leq M$ 成立，则称数列 x_n 有界，否则，称为无界.

例如，数列 $x_n = \frac{n}{n+1}$ ；有界 数列 $x_n = 2^n$.无界

数轴上对应于有界数列的点 x_n 都落在闭区间 $[-M, M]$ 上.

定理1 收敛的数列必定有界.

证 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 由定义, 取 $\varepsilon = 1$,

则 $\exists N$, 使得当 $n > N$ 时恒有 $|x_n - a| < 1$,

即有 $a - 1 < x_n < a + 1$.

记 $M = \max\{|x_1|, \dots, |x_N|, |a - 1|, |a + 1|\}$,

则对一切自然数 n , 皆有 $|x_n| \leq M$, 故 $\{x_n\}$ 有界.

注意: 有界性是数列收敛的必要条件.

推论 无界数列必定发散.

2.唯一性

定理2 每个收敛的数列只有一个极限.

证 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, 由定义,

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, N_2$. 使得当 $n > N_1$ 时恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$;

当 $n > N_2$ 时恒有 $|x_n - b| < \varepsilon$; 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$,

$$\begin{aligned} \text{则当 } n > N \text{ 时有 } |a - b| &= |(x_n - b) - (x_n - a)| \\ &\leq |x_n - b| + |x_n - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

上式仅当 $a = b$ 时才能成立. 故收敛数列极限唯一.

例5 证明数列 $x_n = (-1)^{n+1}$ 是发散的.

证 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 由定义, 对于 $\varepsilon = \frac{1}{2}$,

则 $\exists N$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \frac{1}{2}$ 成立,

即当 $n > N$ 时, $x_n \in (a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2})$, 区间长度为1.

而 x_n 无休止地反复取1, -1两个数,

不可能同时位于长度为1的区间内.

事实上, $\{x_n\}$ 是有界的, 但却发散.

3.(收敛数列与其子数列间的关系) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a ，那么它的任一子数列也收敛，且极限也是 a

五.小结

数列:研究其变化规律;

数列极限:极限思想,精确定义,几何意义;

收敛数列的性质:有界性唯一性.

思考题 指出下列证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ 中的错误。

证明 要使 $\sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon$, 只要使 $\frac{1}{n} \ln n < \ln(1 + \varepsilon)$

从而由 $\frac{1}{n} < \frac{\ln(1 + \varepsilon)}{\ln n} < \frac{\ln(1 + \varepsilon)}{\ln 2}$

得 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lceil \frac{\ln 2}{\ln(1 + \varepsilon)} \right\rceil + 1$

当 $n > N$ 时, 必有 $0 < \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon$ 成立

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

思考题解答

$$\because \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon \sim \frac{1}{n} \ln n < \ln(1 + \varepsilon) \quad (\text{等价})$$

证明中所采用的 $\frac{1}{n} < \frac{\ln(1 + \varepsilon)}{\ln n} < \frac{\ln(1 + \varepsilon)}{\ln 2}$

实际上就是不等式 $\frac{\ln 2}{n} < \frac{\ln n}{n} < \ln(1 + \varepsilon)$

即证明中没有采用“适当放大” $\frac{\ln n}{n}$ 的值

反而缩小为 $\frac{\ln 2}{n}$

从而 $n > N > \frac{\ln(1 + \varepsilon)}{\ln 2}$ 时,

仅有 $\frac{\ln 2}{n} < \ln(1 + \varepsilon)$ 成立,

但不是 $\frac{\ln n}{n} < \ln(1 + \varepsilon)$ 的充分条件.

练习题

一、利用数列极限的定义证明：

1、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+1} = \frac{3}{2}$;

2、 $\lim_{n \rightarrow \infty} 0.999\dots 9 = 1$

二、设数列 x_n 有界，又 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$,

证明： $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$.

第四节 函数的极限



一、自变量趋向无穷大时函数的极限



二、自变量趋向有限值时函数的极限



三、函数极限的性质



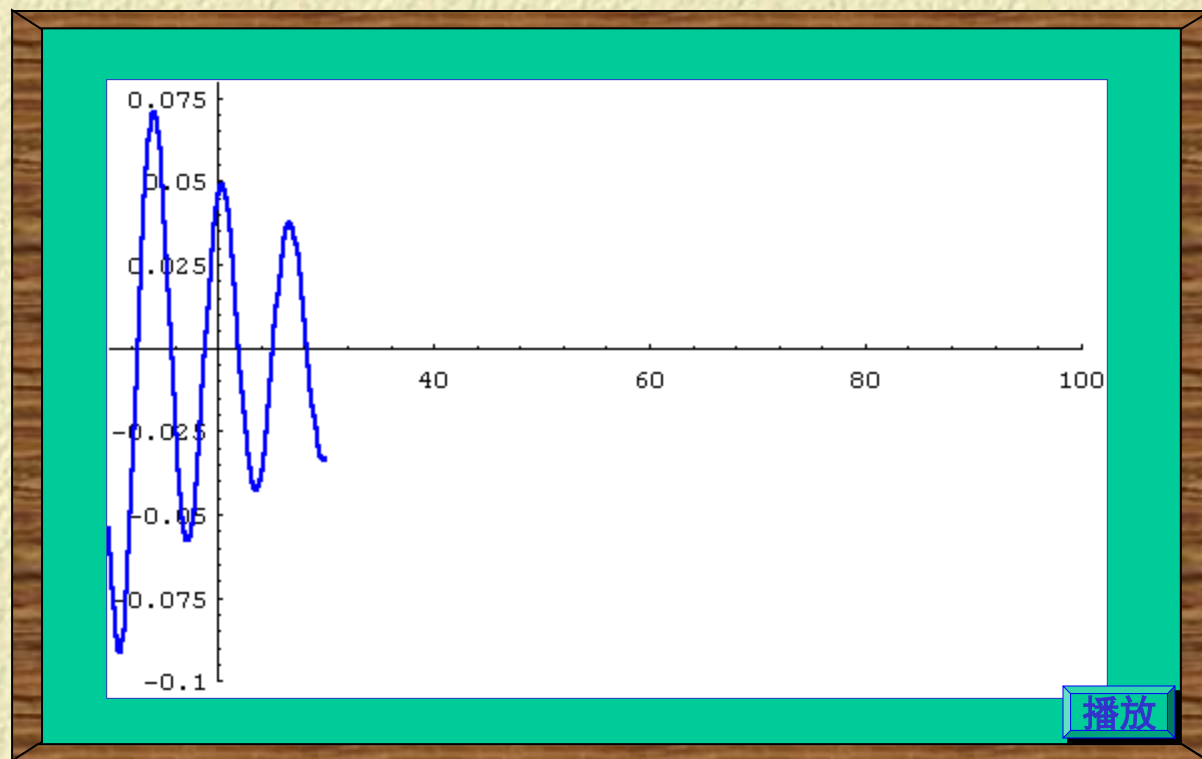
四、小结 思考题

帮助

返回

一、自变量趋向无穷大时函数的极限

观察函数 $\frac{\sin x}{x}$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的变化趋势.



上页

下页

返回

问题: 函数 $y = f(x)$ 在 $x \rightarrow \infty$ 的过程中, 对应函数值 $f(x)$ 无限趋近于确定值 A .

通过上面演示实验的观察:

当 x 无限增大时, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 无限接近于 0.

问题: 如何用数学语言刻划函数“无限接近”.

$|f(x) - A| < \varepsilon$ 表示 $|f(x) - A|$ 任意小;

$|x| > X$ 表示 $x \rightarrow \infty$ 的过程.

1. 定义：

定义 1 如果对于任意给定的正数 ε (不论它多么小), 总存在着正数 X , 使得对于适合不等式 $|x| > X$ 的一切 x , 所对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 那末常数 A 就叫函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A (\text{当 } x \rightarrow \infty)$$

" $\varepsilon - X$ " 定义 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \text{使当 } |x| > X \text{ 时, 恒有 } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

2.另两种情形:

1⁰. $x \rightarrow +\infty$ 情形: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$

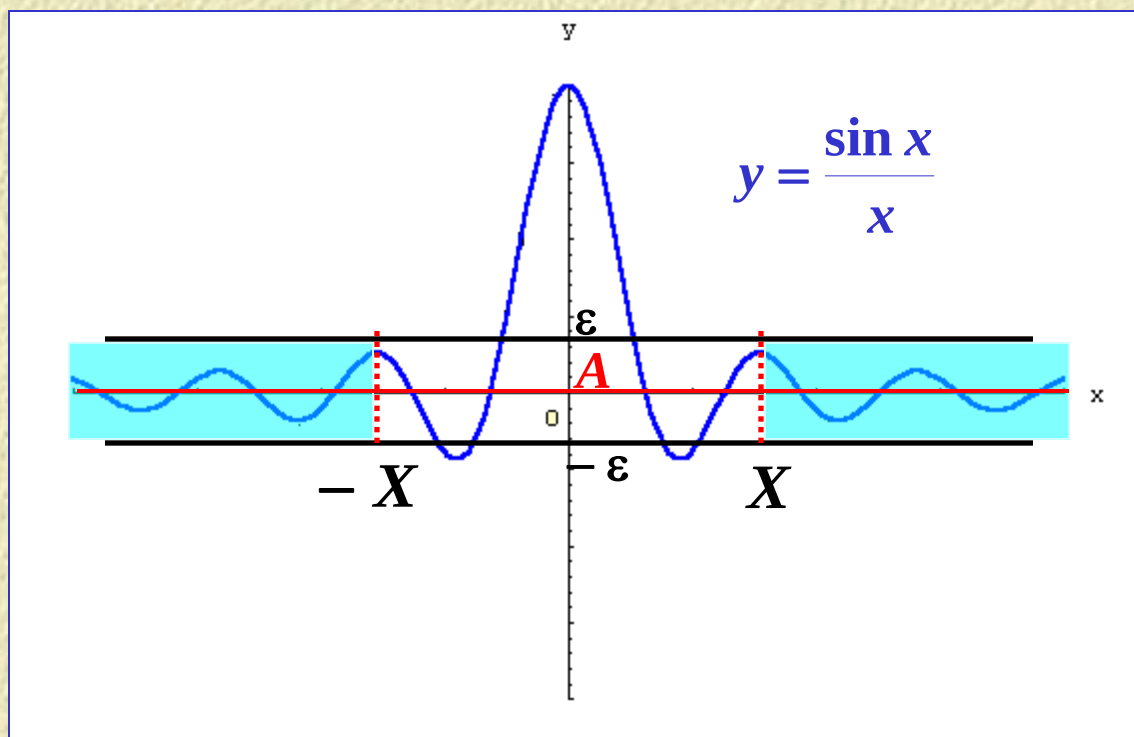
$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使当 $x > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

2⁰. $x \rightarrow -\infty$ 情形: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使当 $x < -X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

定理: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.

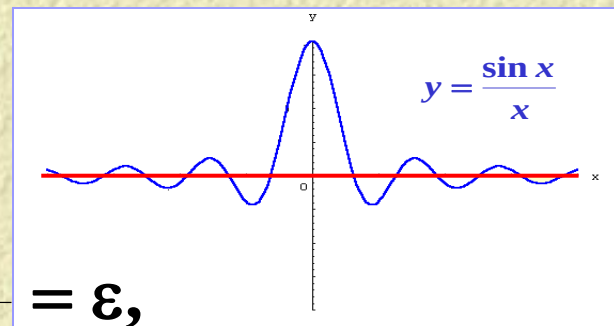
3.几何解释:



当 $x < -X$ 或 $x > X$ 时, 函数 $y = f(x)$ 图形完全落在以直线 $y = A$ 为中心线, 宽为 2ϵ 的带形区域内.

例1 证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

证 $\because \left| \frac{\sin x}{x} - 0 \right| = \left| \frac{\sin x}{x} \right| < \frac{1}{|x|} < \frac{1}{X} = \varepsilon,$



$\forall \varepsilon > 0$, 取 $X = \frac{1}{\varepsilon}$, 则当 $|x| > X$ 时恒有

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 0 \right| < \varepsilon, \quad \text{故 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

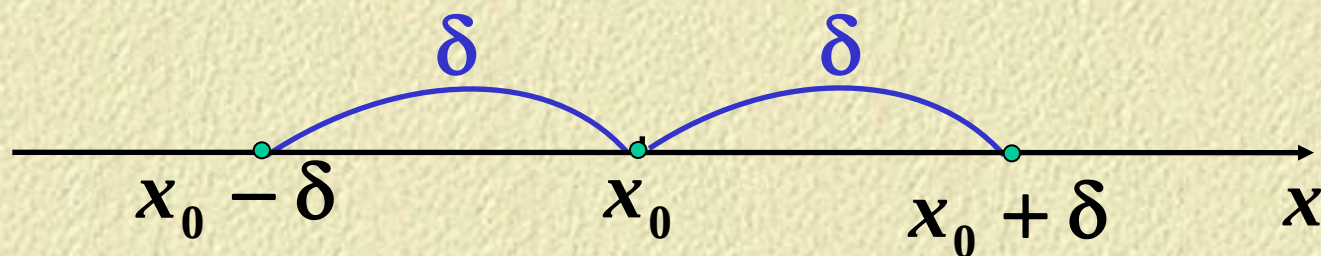
定义: 如果 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$, 则直线 $y = c$ 是函数 $y = f(x)$ 的图形的水平渐近线.

二、自变量趋向有限值时函数的极限

问题：函数 $y = f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 的过程中, 对应函数值 $f(x)$ 无限趋近于确定值 A .

$|f(x) - A| < \varepsilon$ 表示 $|f(x) - A|$ 任意小;

$0 < |x - x_0| < \varepsilon$ 表示 $x \rightarrow x_0$ 的过程.



点 x_0 的去心 δ 邻域, δ 体现 x 接近 x_0 程度.

1. 定义：

定义 2 如果对于任意给定的正数 ε (不论它多么小), 总存在正数 δ , 使得对于适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的一切 x , 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 那末常数 A 就叫函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 记作

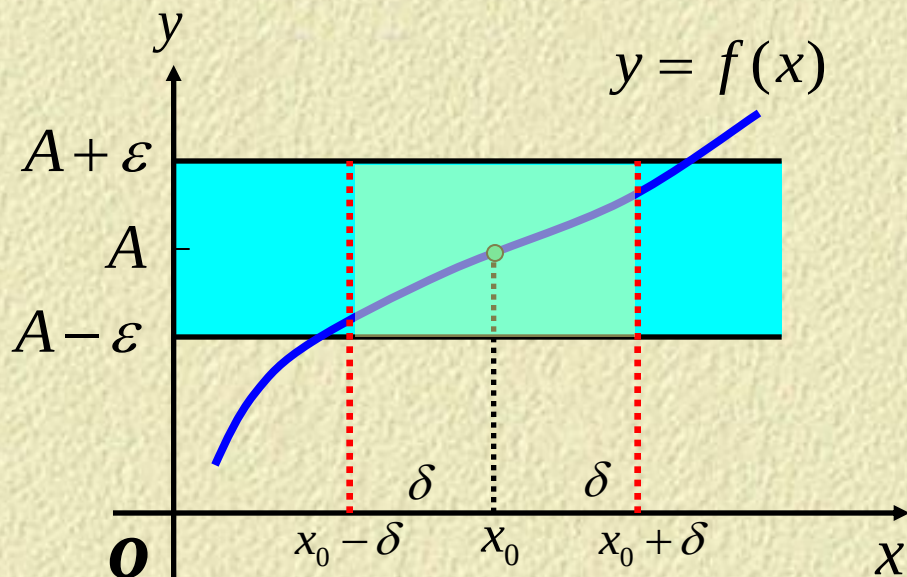
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A (\text{当 } x \rightarrow x_0)$$

" $\varepsilon - \delta$ " 定义 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

注意: 1.函数极限与 $f(x)$ 在点 x_0 是否有定义无关;
2. δ 与任意给定的正数 ε 有关.

2.几何解释:

当 x 在 x_0 的去心 δ 邻域时,函数 $y = f(x)$ 图形完全落在以直线 $y = A$ 为中心线,宽为 2ε 的带形区域内.



显然,找到一个 δ 后, δ 越小越好.

例2 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$, (C 为常数).

证 任给 $\varepsilon > 0$, 任取 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$|f(x) - A| = |C - C| = 0 < \varepsilon \text{ 成立, } \therefore \lim_{x \rightarrow x_0} C = C.$$

例3 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.

证 $\because |f(x) - A| = |x - x_0|$, 任给 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$,

当 $0 < |x - x_0| < \delta = \varepsilon$ 时,

$$|f(x) - A| = |x - x_0| < \varepsilon \text{ 成立, } \therefore \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0.$$

例4 证明 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

证 函数在点 $x=1$ 处没有定义.

$$\because |f(x) - A| = \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = |x - 1| \quad \text{任给 } \varepsilon > 0,$$

要使 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 只要取 $\delta = \varepsilon$,

当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 就有 $\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \varepsilon$,

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

例5 证明:当 $x_0 > 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$.

$$\text{证 } \because |f(x) - A| = |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \left| \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right| \leq \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}},$$

任给 $\varepsilon > 0$, 要使 $|f(x) - A| < \varepsilon$,

只要 $|x - x_0| < \sqrt{x_0}\varepsilon$ 且不取负值. 取 $\delta = \min\{x_0, \sqrt{x_0}\varepsilon\}$,

当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 就有 $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon$,

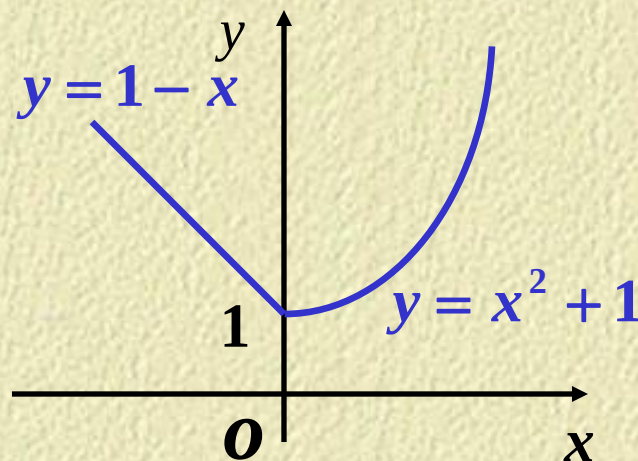
$$\therefore \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}.$$

3.单侧极限:

例如,

$$\text{设 } f(x) = \begin{cases} 1-x, & x < 0 \\ x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

证明 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.



分 $x > 0$ 和 $x < 0$ 两种情况分别讨论

x 从左侧无限趋近 x_0 , 记作 $x \rightarrow x_0 - 0$;

x 从右侧无限趋近 x_0 , 记作 $x \rightarrow x_0 + 0$;

左极限 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时,
恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

记作 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 - 0 \\ (x \rightarrow x_0^-)}} f(x) = A$ 或 $f(x_0 - 0) = A$.

右极限 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时,
恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

记作 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 + 0 \\ (x \rightarrow x_0^+)}} f(x) = A$ 或 $f(x_0 + 0) = A$.

注意: $\{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$

$$= \{x | 0 < x - x_0 < \delta\} \cup \{x | -\delta < x - x_0 < 0\}$$

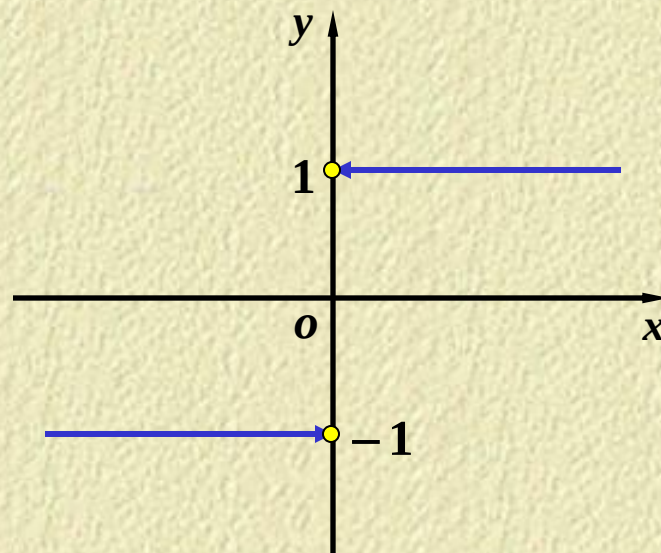
定理： $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A.$

例6 验证 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ 不存在.

$$\begin{aligned} \text{证 } \lim_{x \rightarrow -0} \frac{|x|}{x} &= \lim_{x \rightarrow -0} \frac{-x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -0} (-1) = -1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} 1 = 1$$

左右极限存在但不相等, $\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.



三、函数极限的性质

1.有界性

定理 若在某过程下, $f(x)$ 有极限, 则存在过程的一个时刻, 在此时刻以后 $f(x)$ 有界.

2.唯一性

定理 若 $\lim f(x)$ 存在, 则极限唯一.

3.不等式性质

定理(保序性) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B.$

若 $\exists \delta > 0, \forall x \in U^0(x_0, \delta),$ 有 $f(x) \leq g(x),$ 则 $A \leq B.$

推论 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B,$ 且 $A < B$

则 $\exists \delta > 0, \forall x \in U^0(x_0, \delta),$ 有 $f(x) < g(x).$

定理(保号性) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$),
则 $\exists \delta > 0$, 当 $x \in U^0(x_0, \delta)$ 时, $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).

推论 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $\exists \delta > 0$, 当 $x \in U^0(x_0, \delta)$ 时,
 $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$), 则 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$).

4.子列收敛性(函数极限与数列极限的关系)

定义 设在过程 $x \rightarrow a$ (a 可以是 x_0 , x_0^+ , 或 x_0^-)中有数列 $x_n (\neq a)$, 使得 $n \rightarrow \infty$ 时 $x_n \rightarrow a$. 则称数列 $\{f(x_n)\}$, 即 $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow a$ 时的子列.

定理 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, 数列 $f(x_n)$ 是 $f(x)$ 当 $x \rightarrow a$ 时的一个子列, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

证 $\because \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有
 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

又 $\because \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ 且 $x_n \neq x_0$,

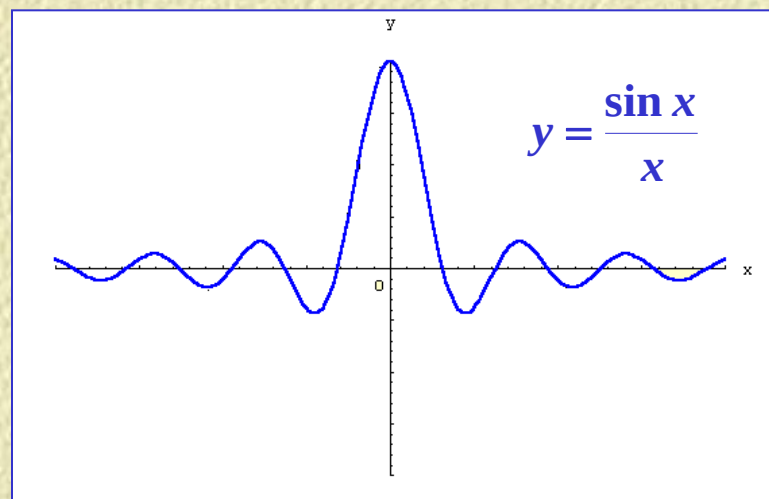
$\therefore$ 对上述 $\delta > 0, \exists N > 0$, 使当 $n > N$ 时, 恒有
 $0 < |x_n - x_0| < \delta$.

从而有 $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, 故 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

例如, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n+1} \sin \frac{n+1}{n^2} = 1$$



函数极限与数列极限的关系

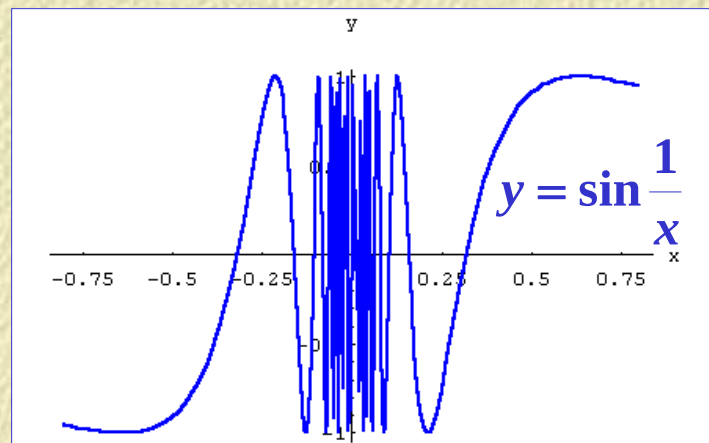
函数极限存在的充要条件是它的任何子列的极限都存在, 且相等.

例7 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在.

证 取 $\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{n\pi} \right\}$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 且 $x_n \neq 0$;

取 $\{x'_n\} = \left\{ \frac{1}{\frac{4n+1}{2}\pi} \right\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = 0$, 且 $x'_n \neq 0$;



$$\text{而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n\pi = 0,$$

$$\text{而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x'_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{4n+1}{2} \pi$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1,$$

二者不相等, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在.

四、小结

函数极限的统一定义

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = A;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A.$$

$\lim f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$ 时刻,从此时刻以后,
恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$. (见下表)

过 程	$n \rightarrow \infty$	$x \rightarrow \infty$	$x \rightarrow +\infty$	$x \rightarrow -\infty$
时 刻	N			
从此时刻以后	$n > N$	$ x > N$	$x > N$	$x < -N$
$f(x)$	$ f(x) - A < \varepsilon$			

过 程	$x \rightarrow x_0$	$x \rightarrow x_0^+$	$x \rightarrow x_0^-$
时 刻	δ		
从此时刻以后	$0 < x - x_0 < \delta$	$0 < x - x_0 < \delta$	$-\delta < x - x_0 < 0$
$f(x)$	$ f(x) - A < \varepsilon$		

思考题

试问函数 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 10, & x = 0 \\ 5 + x^2, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处

的左、右极限是否存在？当 $x \rightarrow 0$ 时， $f(x)$ 的极限是否存在？

思考题解答

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (5 + x^2) = 5, \quad \text{左极限存在,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 0, \quad \text{右极限存在,}$$

$$\because \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ 不存在.}$$

练习题

一、填空题:

1、当 $x \rightarrow 2$ 时, $y = x^2 \rightarrow 4$, 问当 δ 取 ____ 时,
只要 $0 < |x - 2| < \delta$, 必有 $|y - 4| < 0.001$.

2、当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3} \rightarrow 1$, 问当 z 取 _____
时, 只要 $|x| > z$, 必有 $|y - 1| < 0.01$.

二、用函数极限的定义 证明:

1、
$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1 - 4x^2}{2x + 1} = 2$$

2、
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$$

三、试证：函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在并且相等。

四、讨论：函数 $\phi(x) = \frac{|x|}{x}$ 在 $x \rightarrow 0$ 时的极限是否存在？

练习题答案

一、1、0.0002;

2、 $\sqrt{397}$.

四、不存在.

第五节 无穷小与无穷大



一、无穷小



二、无穷大



三、无穷小与无穷大的关系



四、小结 思考题

帮助

返回

一、无穷小

1.定义：极限为零的变量称为无穷小。

定义 1 如果对于任意给定的正数 ε （不论它多么小），总存在正数 δ （或正数 X ），使得对于适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ （或 $|x| > X$ ）的一切 x ，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)| < \varepsilon$ ，

那末 称函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ （或 $x \rightarrow \infty$ ）时为无穷小，

记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ （或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ）。

例如,

$\because \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$, $\therefore$ 函数 $\sin x$ 是当 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小.

$\because \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, $\therefore$ 函数 $\frac{1}{x}$ 是当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小.

$\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$, $\therefore$ 数列 $\{\frac{(-1)^n}{n}\}$ 是当 $n \rightarrow \infty$ 时的无穷小.

注意

1. 无穷小是变量, 不能与很小的数混淆;
2. 零是可以作为无穷小的唯一的数.

2.无穷小与函数极限的关系:

定理 1 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x),$

其中 $\alpha(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小.

证 必要性 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 令 $\alpha(x) = f(x) - A$,

则有 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$, $\therefore f(x) = A + \alpha(x).$

充分性 设 $f(x) = A + \alpha(x),$

其中 $\alpha(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小,

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (A + \alpha(x)) = A + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = A.$

意义 1.将一般极限问题转化为特殊极限问题(无穷小);

2.给出了函数 $f(x)$ 在 x_0 附近的近似表达式
 $f(x) \approx A$, 误差为 $\alpha(x)$.

3.无穷小的运算性质:

定理2 在同一过程中,有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

证 设 α 及 β 是当 $x \rightarrow \infty$ 时的两个无穷小,

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 > 0, N_2 > 0$, 使得

当 $|x| > N_1$ 时恒有 $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$; 当 $|x| > N_2$ 时恒有 $|\beta| < \frac{\varepsilon}{2}$;

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $|x| > N$ 时, 恒有

$$|\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

$$\therefore \alpha \pm \beta \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty)$$

注意 无穷多个无穷小的代数和未必是无穷小.

例如, $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{n}$ 是无穷小,

但 n 个 $\frac{1}{n}$ 之和为 1 不是无穷小.

定理3 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

证 设函数 u 在 $U^0(x_0, \delta_1)$ 内有界,

则 $\exists M > 0, \delta_1 > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时
恒有 $|u| \leq M$.

又设 α 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小,

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时

恒有 $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{M}$.

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有

$$|u \cdot \alpha| = |u| \cdot |\alpha| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

$\therefore$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $u \cdot \alpha$ 为无穷小.

推论1 在同一过程中, 有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小.

推论2 常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论3 有限个无穷小的乘积也是无穷小.

例如, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x \sin \frac{1}{x}$, $x^2 \arctan \frac{1}{x}$ 都是无穷小

二、无穷大

绝对值无限增大的变量称为无穷大.

定义 2 如果对于任意给定的正数 M (不论它多么小), 总存在正数 δ (或正数 X), 使得对于适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ (或 $|x| > X$) 的一切 x , 所对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)| > M$,

则称函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时为无穷小,

记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$).

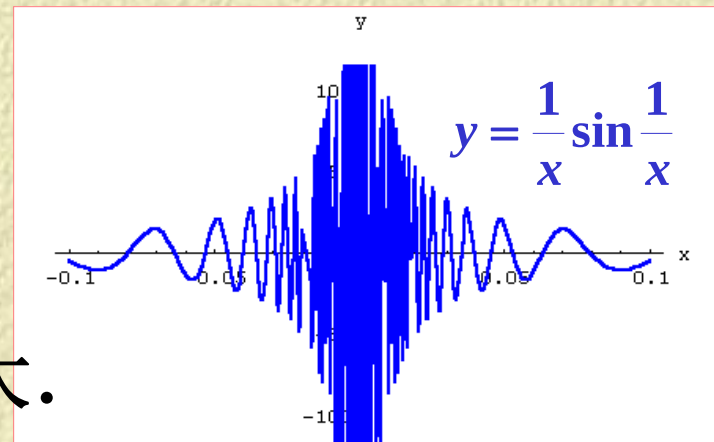
特殊情形：正无穷大，负无穷大.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = +\infty \quad (\text{或} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = -\infty)$$

- 注意**
1. 无穷大是变量, 不能与很大的数混淆;
 2. 切勿将 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 认为极限存在.
 3. 无穷大是一种特殊的无界变量, 但是无界变量未必是无穷大.

例如, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$

是一个无界变量, 但不是无穷大.



(1) 取 $x_0 = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}} \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$

$y(x_0) = 2k\pi + \frac{\pi}{2},$ 当 k 充分大时, $y(x_0) > M.$ 无界,

(2) 取 $x_0 = \frac{1}{2k\pi} \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$

当 k 充分大时, $x_k < \delta,$

但 $y(x_k) = 2k\pi \sin 2k\pi = 0 < M.$

不是无穷大.

上页

下页

返回

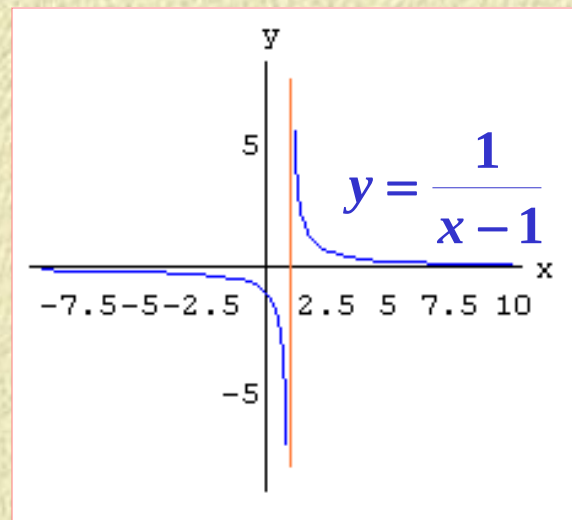
例 证明 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$.

证 $\forall M > 0$. 要使 $\left| \frac{1}{x-1} \right| > M$,

只要 $|x-1| < \frac{1}{M}$, 取 $\delta = \frac{1}{M}$,

当 $0 < |x-1| < \delta = \frac{1}{M}$ 时, 就有 $\left| \frac{1}{x-1} \right| > M$. $\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$.

定义: 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 则直线 $x = x_0$ 是函数 $y = f(x)$ 的图形的铅直渐近线.



三、无穷小与无穷大的关系

定理4 在同一过程中, 无穷大的倒数为无穷小;
恒不为零的无穷小的倒数为无穷大.

证 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时

恒有 $|f(x)| > \frac{1}{\varepsilon}$, 即 $\left| \frac{1}{f(x)} \right| < \varepsilon$.

$\therefore$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小.

反之, 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 且 $f(x) \neq 0$.

$\therefore \forall M > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时

恒有 $|f(x)| < \frac{1}{M}$, 由于 $f(x) \neq 0$, 从而 $\left| \frac{1}{f(x)} \right| > M$.

$\therefore$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

意义 关于无穷大的讨论, 都可归结为关于无穷小的讨论.

四、小结

无穷小与无穷大是相对于过程而言的.

1、主要内容: 两个定义;四个定理;三个推论.

2、几点注意:

- (1) 无穷小 (大) 是变量,不能与很小 (大) 的数混淆, 零是唯一的无穷小的数;
- (2) 无穷多个无穷小的代数和 (乘积) 未必是无穷小.
- (3) 无界变量未必是无穷大.

思考题

若 $f(x) > 0$ ，且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ ，

问：能否保证有 $A > 0$ 的结论？试举例说明。

思考题解答

不能保证.

$$\text{例 } f(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0, \quad \text{有 } f(x) = \frac{1}{x} > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = A = 0.$$

练习题

一、填空题：

1、凡无穷小量皆以_____为极限.

2、在_____条件下,直线 $y = c$ 是函数 $y = f(x)$ 的水平渐近线.

3、 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ _____ $f(x) = A + \alpha$,
(其中 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha = 0$).

4、在同一过程中,若 $f(x)$ 是无穷大,
则_____是无穷小.

二、根据定义证明:当 $x \rightarrow 0$ 时,函数 $y = \frac{1+2x}{x}$
是无穷大,问 x 应满足什么条件,能使 $|y| > 10^4$.

三、证明函数 $y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1]$ 上无界, 但当 $x \rightarrow +0$ 时, 这个函数不是无穷大.

练习题答案

一、1、0；

$$2、\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ x \rightarrow \pm \infty}} f(x) = C ;$$

3、 $\Leftrightarrow$ ；

$$4、\frac{1}{f(x)}.$$

$$二、0 < |x| < \frac{1}{10^4 + 2}.$$

上页

下页

返回

第六节 极限运算法则



一、极限运算法则



二、求极限方法举例



三、小结 思考题

帮助

返回

一、极限运算法则

定理 设 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 则

$$(1) \quad \lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B;$$

$$(2) \quad \lim[f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B;$$

$$(3) \quad \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \quad \text{其中 } B \neq 0.$$

证 $\because \lim f(x) = A, \quad \lim g(x) = B.$

$\therefore f(x) = A + \alpha, \quad g(x) = B + \beta. \quad \text{其中 } \alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0.$

由无穷小运算法则,得

$[f(x) \pm g(x)] - (A \pm B) = \alpha \pm \beta \rightarrow 0. \therefore (1) \text{成立.}$

$$\begin{aligned} [f(x) \cdot g(x)] - (A \cdot B) &= (A + \alpha)(B + \beta) - AB \\ &= (A\beta + B\alpha) + \alpha\beta \rightarrow 0. \end{aligned} \quad \therefore (2) \text{成立.}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} = \frac{A + \alpha}{B + \beta} - \frac{A}{B} = \frac{B\alpha - A\beta}{B(B + \beta)} \quad \because B\alpha - A\beta \rightarrow 0.$$

又 $\because \beta \rightarrow 0, B \neq 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$|\beta| < \frac{|B|}{2}, \quad \therefore |B + \beta| \geq |B| - |\beta| > |B| - \frac{1}{2}|B| = \frac{1}{2}|B|$$

$$\therefore |B(B + \beta)| > \frac{1}{2} B^2, \text{ 故 } \left| \frac{1}{B(B + \beta)} \right| < \frac{2}{B^2}, \text{ 有界,}$$

$\therefore$ (3)成立.

推论1 如果 $\lim f(x)$ 存在,而 c 为常数,则

$$\lim[cf(x)] = c \lim f(x).$$

常数因子可以提到极限记号外面.

推论2 如果 $\lim f(x)$ 存在,而 n 是正整数,则

$$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n.$$

二、求极限方法举例

例1 求 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 5}$.

解 $\because \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 5) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 3x + \lim_{x \rightarrow 2} 5$

$$= (\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 - 3 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 5$$

$$= 2^2 - 3 \cdot 2 + 5 = 3 \neq 0,$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 5} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x^3 - \lim_{x \rightarrow 2} 1}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 5)} = \frac{2^3 - 1}{3} = \frac{7}{3}.$$

小结: 1. 设 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, 则有

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= a_0 \left(\lim_{x \rightarrow x_0} x \right)^n + a_1 \left(\lim_{x \rightarrow x_0} x \right)^{n-1} + \cdots + a_n \\ &= a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \cdots + a_n = f(x_0).\end{aligned}$$

2. 设 $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, 且 $Q(x_0) \neq 0$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = f(x_0).$$

若 $Q(x_0) = 0$, 则商的法则不能应用.

例2 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x - 1}{x^2 + 2x - 3}$.

解 $\because \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x - 3) = 0$, 商的法则不能用

又 $\because \lim_{x \rightarrow 1} (4x - 1) = 3 \neq 0$,

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{4x - 1} = \frac{0}{3} = 0.$$

由无穷小与无穷大的关系,得

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x - 1}{x^2 + 2x - 3} = \infty.$$

例3 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3}$.

解 $x \rightarrow 1$ 时,分子,分母的极限都是零. ($\frac{0}{0}$ 型)

先约去不为零的无穷小因子 $x - 1$ 后再求极限.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x + 3)(x - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{x + 3} = \frac{1}{2}.$$

(消去零因子法)

例4 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 5}{7x^3 + 4x^2 - 1}$.

解 $x \rightarrow \infty$ 时, 分子, 分母的极限都是无穷大. ($\frac{\infty}{\infty}$ 型)

先用 x^3 去除分子分母, 分出无穷小, 再求极限.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 5}{7x^3 + 4x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^3}}{7 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^3}} = \frac{2}{7}.$$

(无穷小因子分出法)

小结: 当 $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, m$ 和 n 为非负整数时有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n = m, \\ 0, & \text{当 } n > m, \\ \infty, & \text{当 } n < m, \end{cases}$$

无穷小分出法: 以分母中自变量的最高次幂除分子, 分母, 以分出无穷小, 然后再求极限.

例5 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2})$.

解 $n \rightarrow \infty$ 时, 是无穷小之和. 先变形再求极限.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2}$$

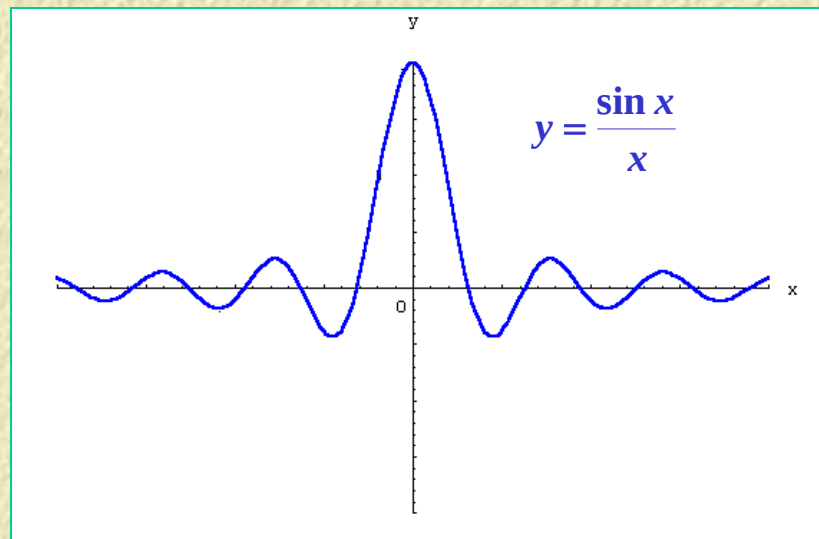
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{2}.$$

例6 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$.

解 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{x}$ 为无穷小,

而 $\sin x$ 是有界函数.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$



例7 设 $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x < 0 \\ x^2+1, & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

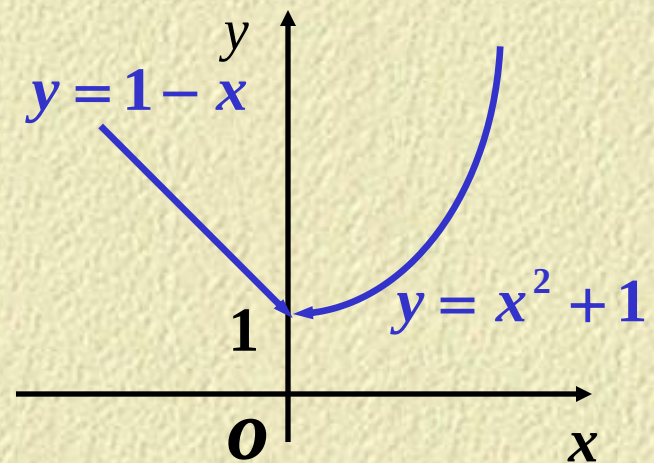
解 $x=0$ 是函数的分段点, 两个单侧极限为

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1-x) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2+1) = 1,$$

左右极限存在且相等,

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$



三、小结

1.极限的四则运算法则及其推论;

2.极限求法;

a.多项式与分式函数代入法求极限;

b.消去零因子法求极限;

c.无穷小因子分出法求极限;

d.利用无穷小运算性质求极限;

e.利用左右极限求分段函数极限.

思考题

在某个过程中，若 $f(x)$ 有极限， $g(x)$ 无极限，那么 $f(x) + g(x)$ 是否有极限？为什么？

思考题解答

没有极限.

假设 $f(x) + g(x)$ 有极限, $\because f(x)$ 有极限,

由极限运算法则可知:

$g(x) = [f(x) + g(x)] - f(x)$ 必有极限,

与已知矛盾, 故假设错误.

练习题

一、填空题:

1、 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3}{x - 3} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2、 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

3、 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})(2 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}) = \underline{\hspace{2cm}}.$

4、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3} = \underline{\hspace{2cm}}.$

5、 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

6、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

7、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^4 - 2x^2 + x}{3x^2 + 2x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

8、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x - 3)^{20} (3x + 2)^{30}}{(2x + 1)^{50}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、求下列各极限：

1、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n})$

2、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h}$

3、 $\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3})$

4、 $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$

5、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x}} - \sqrt{x})$

6、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x - 1}{4^x + 1}$

7、 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - x^n}{x^m + x^n - 2}$

练习题答案

- 一、 1、 -5 ； 2、 3 ； 3、 2 ； 4、 $\frac{1}{5}$ ；
5、 0 ； 6、 0 ； 7、 $\frac{1}{2}$ ； 8、 $(\frac{3}{2})^{30}$.
- 二、 1、 2 ； 2、 $2x$ ； 3、 -1 ； 4、 -2 ；
5、 $\frac{1}{2}$ ； 6、 0 ； 7、 $\frac{m-n}{m+n}$.

第八节 无穷小的比较



一、无穷小的比较



二、等价无穷小替换



三、小结 思考题

帮助

返回

一、无穷小的比较

例如, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x, x^2, \sin x, x^2 \sin \frac{1}{x}$ 都是无穷小.

观察各极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x} = 0,$$

x^2 比 $3x$ 要快得多;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$\sin x$ 与 x 大致相同;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \text{ 不存在. 不可比.}$$

极限不同, 反映了趋向于零的“快慢”程度不同.

上页

下页

返回

定义：设 α, β 是同一过程中的两个无穷小, 且 $\alpha \neq 0$.

(1) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 就说 β 是比 α 高阶的无穷小,

记作 $\beta = o(\alpha)$;

(2) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = C (C \neq 0)$, 就说 β 与 α 是同阶的无穷小;

特殊地 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 则称 β 与 α 是等价的无穷小;

记作 $\alpha \sim \beta$;

(3) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = C (C \neq 0, k > 0)$, 就说 β 是 α 的 k 阶的无穷小.

例1 证明:当 $x \rightarrow 0$ 时, $4x \tan^3 x$ 为 x 的四阶无穷小.

解
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x \tan^3 x}{x^4} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^3 = 4,$$

故当 $x \rightarrow 0$ 时, $4x \tan^3 x$ 为 x 的四阶无穷小.

例2 当 $x \rightarrow 0$ 时,求 $\tan x - \sin x$ 关于 x 的阶数.

解
$$\because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = \frac{1}{2},$$

$\therefore \tan x - \sin x$ 为 x 的三阶无穷小.

常用等价无穷小： 当 $x \rightarrow 0$ 时，

$$\sin x \sim x, \quad \arcsin x \sim x,$$

$$\tan x \sim x, \quad \arctan x \sim x,$$

$$\ln(1+x) \sim x, \quad e^x - 1 \sim x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2.$$

用等价无穷小可给出函数的近似表达式：

$$\because \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha} = 1, \quad \therefore \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha - \beta}{\alpha} = 0, \quad \text{即 } \alpha - \beta = o(\alpha),$$

于是有 $\alpha = \beta + o(\alpha)$.

$$\text{例如, } \sin x = x + o(x), \quad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

二、等价无穷小替换

定理(等价无穷小替换定理)

设 $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$ 且 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在, 则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$.

证
$$\begin{aligned}\lim \frac{\beta}{\alpha} &= \lim \left(\frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha} \right) \\ &= \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}.\end{aligned}$$

例3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 2x}{1 - \cos x}$.

解 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $\tan 2x \sim 2x$.

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x)^2}{\frac{1}{2}x^2} = 8.$$

注意 不能滥用等价无穷小代换.

对于代数和中各无穷小不能分别替换.

例4 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 2x}$.

错解 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x \sim x$, $\sin x \sim x$.

$$\text{原式} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{(2x)^3} = 0.$$

解 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin 2x \sim 2x$,

$$\tan x - \sin x = \tan x(1 - \cos x) \sim \frac{1}{2}x^3,$$

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^3}{(2x)^3} = \frac{1}{16}.$$

例5 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x - \cos x + 1}{\sin 3x}$.

解 $\because \tan x = 5x + o(x), \quad \sin 3x = 3x + o(x),$

$$1 - \cos x = \frac{1}{2} x^2 + o(x^2).$$

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x + o(x) + \frac{1}{2} x^2 + o(x^2)}{3x + o(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 + \frac{o(x)}{x} + \frac{1}{2} x + \frac{o(x^2)}{x}}{3 + \frac{o(x)}{x}} = \frac{5}{3}.$$

三、小结

1.无穷小的比较:

反映了同一过程中,两无穷小趋于零的速度快慢,但并不是所有的无穷小都可进行比较.

高(低)阶无穷小; 等价无穷小; 无穷小的阶.

2.等价无穷小的替换:

求极限的又一种方法, 注意适用条件.

思考题

任何两个无穷小量都可以比较吗？

思考题解答

不能. 例当 $x \rightarrow +\infty$ 时

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{都是无穷小量}$$

但 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ 不存在且不为无穷大

故当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不能比较.

练习题

一、填空题：

$$1、\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 2x} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$2、\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x^n}{(\sin x)^m} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$3、\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$4、\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{x^2 \arctan x} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$5、\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$6、\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+ax)^{\frac{1}{n}} - 1}{x} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

7、当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt{a+x^3} - \sqrt{a} (a > 0)$

对于 x 是_____阶无穷小 .

8、当 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小 $1 - \cos x$ 与 mx^n 等价, 则

$m =$ _____, n _____ .

二、求下列各极限:

1、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$;

2、 $\lim_{\alpha \rightarrow \beta} \frac{e^\alpha - e^\beta}{\alpha - \beta}$;

3、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x - \sin \beta x}{x}$;

4、 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a}$;

三、证明：若 α, β 是无穷小，则 $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta = o(\alpha)$.

四、设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} \sin \frac{\pi}{2} x + \cos(a + bx)}{x^{2n} + 1}$

求：1、 $f(x)$ 的表达式 .

2、确定 a, b 的值, 使得 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$,

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) .$$

练习题答案

一、 1、 $\frac{3}{2}$; 2、 $\begin{cases} 0, m < n \\ 1, m = n \\ \infty, m > n \end{cases}$; 3、 2; 4、 ∞ ;

5、 x ; 6、 $\frac{a}{n}$; 7、 3; 8、 $\frac{1}{2}$, 2.

二、 1、 $\frac{1}{2}$; 2、 e^{β} ; 3、 $\alpha - \beta$; 4、 $\sec^2 a$.

$$\begin{cases} \frac{\sin \frac{\pi}{2} x}{x}, |x| > 1 \\ \frac{1 + \cos(a + b)}{2}, x = 1 \\ \frac{1 + \cos(a - b)}{2}, x = -1 \end{cases}$$

- 四、 1、 $\cos(a + bx), |x| < 1$;
 2、 $a = 2k\pi (k = 0, \pm 1, \dots), b = 0$.

第九节 函数的连续性与间断点



一、函数的连续性



二、函数的间断点



三、小结 思考题

帮助

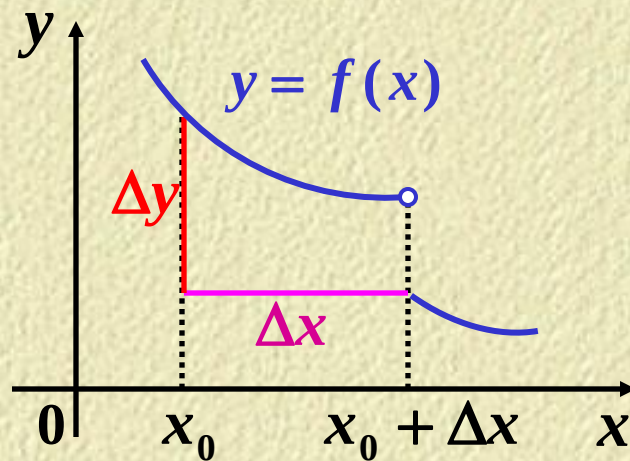
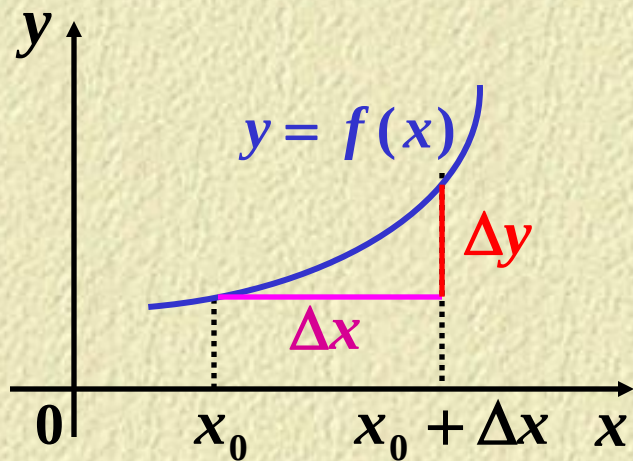
返回

一、函数的连续性

1. 函数的增量

设函数 $f(x)$ 在 $U_\delta(x_0)$ 内有定义, $\forall x \in U_\delta(x_0)$, $\Delta x = x - x_0$, 称为自变量在点 x_0 的增量.

$\Delta y = f(x) - f(x_0)$, 称为函数 $f(x)$ 相应于 Δx 的增量.



2.连续的定义

定义 1 设函数 $f(x)$ 在 $U_\delta(x_0)$ 内有定义, 如果当自变量的增量 Δx 趋向于零时, 对应的函数的增量 Δy 也趋向于零, 即 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ 或

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$, 那末就称函数

$f(x)$ 在点 x_0 连续, x_0 称为 $f(x)$ 的连续点.

设 $x = x_0 + \Delta x$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$,

$\Delta x \rightarrow 0$ 就是 $x \rightarrow x_0$, $\Delta y \rightarrow 0$ 就是 $f(x) \rightarrow f(x_0)$.

定义 2 设函数 $f(x)$ 在 $U_\delta(x_0)$ 内有定义, 如果函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限存在, 且等于它在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 那末就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

" $\varepsilon - \delta$ " 定义:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使当 $|x - x_0| < \delta$ 时,
恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

例1 试证函数 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 在 $x = 0$

处连续.

证 $\because \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0,$

又 $f(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0),$

由定义2知

函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

3.单侧连续

若函数 $f(x)$ 在 $(a, x_0]$ 内有定义,且 $f(x_0 - 0) = f(x_0)$,
则称 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续;

若函数 $f(x)$ 在 $[x_0, b)$ 内有定义,且 $f(x_0 + 0) = f(x_0)$,
则称 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

定理 函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ 是函数 $f(x)$ 在 x_0
处既左连续又右连续.

例2 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \geq 0, \\ x-2, & x < 0, \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+2) = 2 = f(0),$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-2) = -2 \neq f(0),$$

右连续但不左连续,

故函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续.

4.连续函数与连续区间

在区间上每一点都连续的函数,叫做在该区间上的连续函数,或者说函数在该区间上连续.

如果函数在开区间 (a,b) 内连续,并且在左端点 $x=a$ 处右连续,在右端点 $x=b$ 处左连续,则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

例如,有理函数在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是连续的.

例3 证明函数 $y = \sin x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

证 任取 $x \in (-\infty, +\infty)$,

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\because \left| \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \right| \leq 1, \quad \text{则 } |\Delta y| \leq 2 \left| \sin \frac{\Delta x}{2} \right|.$$

对任意的 α , 当 $\alpha \neq 0$ 时, 有 $|\sin \alpha| < \alpha$,

故 $|\Delta y| \leq 2 \left| \sin \frac{\Delta x}{2} \right| < |\Delta x|$, $\therefore$ 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\Delta y \rightarrow 0$.

即函数 $y = \sin x$ 对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都是连续的.

二、函数的间断点

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续必须满足的三个条件：

(1) $f(x)$ 在点 x_0 处有定义；

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在；

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

如果上述三个条件中只要有一个不满足，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续(或间断)，并称点 x_0 为 $f(x)$ 的不连续点(或间断点)。

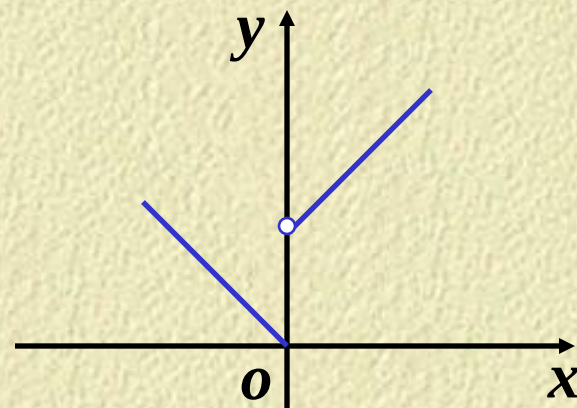
1.跳跃间断点 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处左, 右极限都存在, 但 $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, 则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

例4 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ 1+x, & x > 0, \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

解 $f(0 - 0) = 0, \quad f(0 + 0) = 1,$

$\therefore f(0 - 0) \neq f(0 + 0),$

$\therefore x = 0$ 为函数的跳跃间断点.

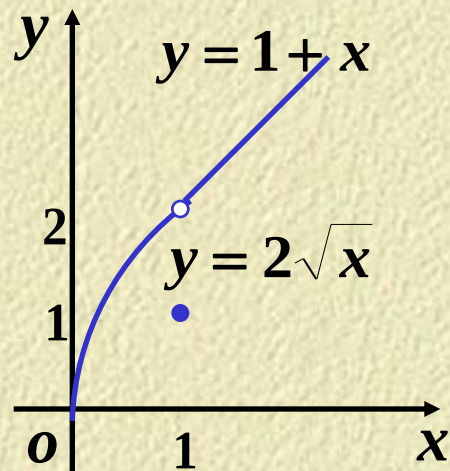


2.可去间断点 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在，
但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$ ，或 $f(x)$ 在点 x_0 处无定
义则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的 可去间断点。

例5 讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1 \\ 1+x, & x > 1, \end{cases}$$

在 $x = 1$ 处的连续性。



解 $\because f(1) = 1,$

$$f(1-0) = 2, \quad f(1+0) = 2,$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \neq f(1),$$

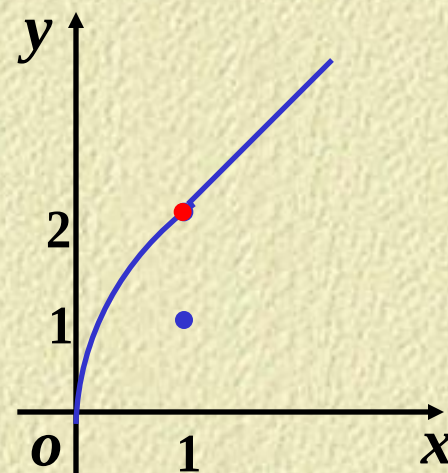
$\therefore x = 1$ 为函数的可去间断点.

注意 可去间断点只要改变或者补充间断处函数的定义, 则可使其变为连续点.

如例5中, 令 $f(1)=2$,

$$\text{则 } f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leq x < 1, \\ 1+x, & x \geq 1, \end{cases}$$

在 $x=1$ 处连续.



跳跃间断点与可去间断点统称为第一类间断点.

特点 函数在点 x_0 处的左、右极限都存在.

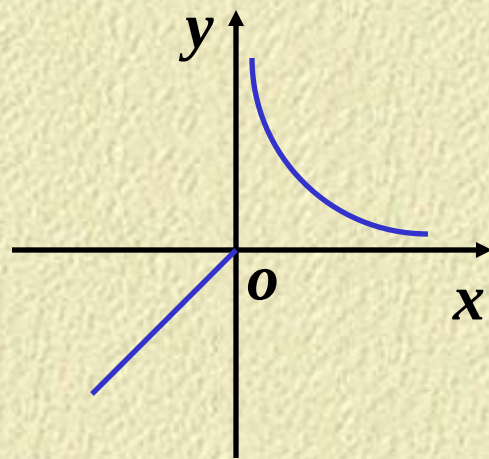
3. 第二类间断点 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限至少有一个不存在, 则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点.

例6 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0, \\ x, & x \leq 0, \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

解 $f(0-0) = 0, \quad f(0+0) = +\infty,$

$\therefore x = 0$ 为函数的第二类间断点.

这种情况称为无穷间断点.

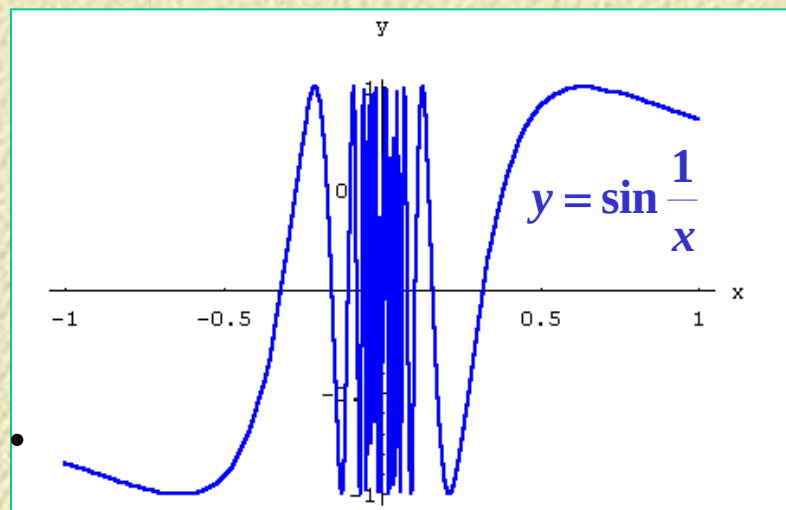


例7 讨论函数 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

解 $\because$ 在 $x = 0$ 处没有定义,

且 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在.

$\therefore x = 0$ 为第二类间断点.



这种情况称为的振荡间断点.

注意 不要以为函数的间断点只是个别的几个点.

★ 狄利克雷函数

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 是有理数时,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数时,} \end{cases}$$

在定义域 $\mathbf{R}$ 内每一点处都间断,且都是第二类间断点.

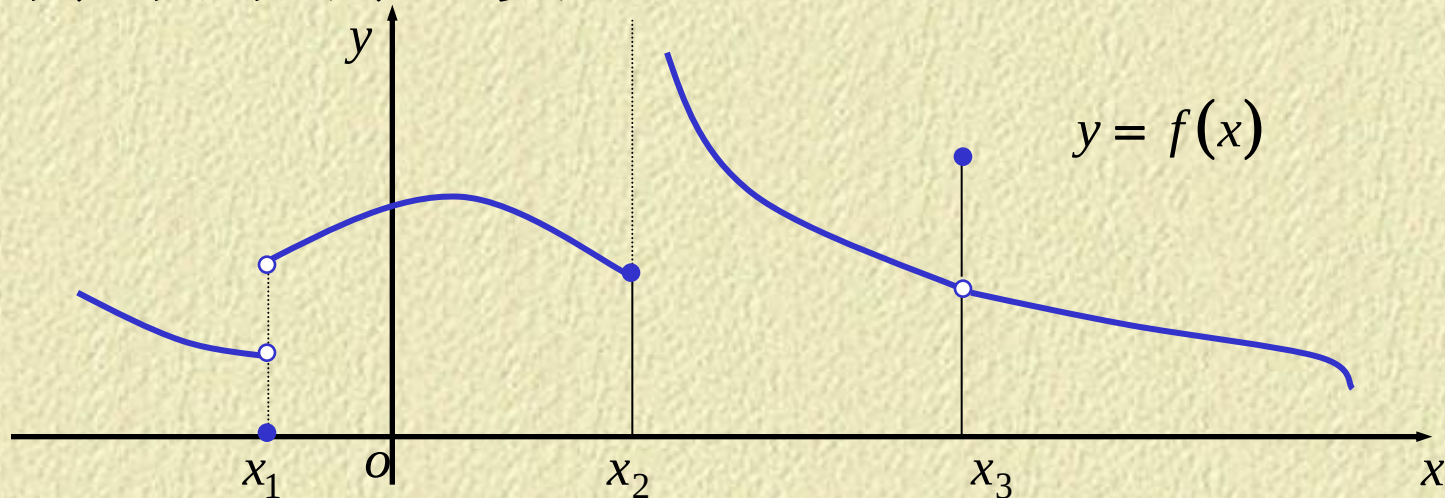
★ $f(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } x \text{ 是有理数时,} \\ -x, & \text{当 } x \text{ 是无理数时,} \end{cases}$

仅在 $x=0$ 处连续,其余各点处处间断.

★ $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 是有理数时,} \\ -1, & \text{当 } x \text{ 是无理数时,} \end{cases}$

在定义域 R 内每一点处都间断, 但其绝对值处处连续.

判断下列间断点类型:



例8 当 a 取何值时,

$$\text{函数 } f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0, \\ a + x, & x \geq 0, \end{cases} \text{ 在 } x = 0 \text{ 处连续.}$$

解 $\because f(0) = a,$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos x = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a + x) = a,$$

要使 $f(0-0) = f(0+0) = f(0), \Rightarrow a = 1,$

故当且仅当 $a = 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

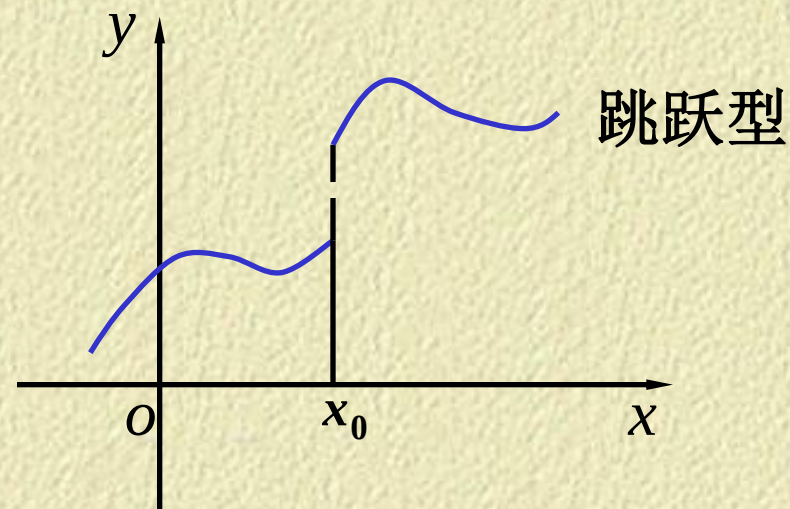
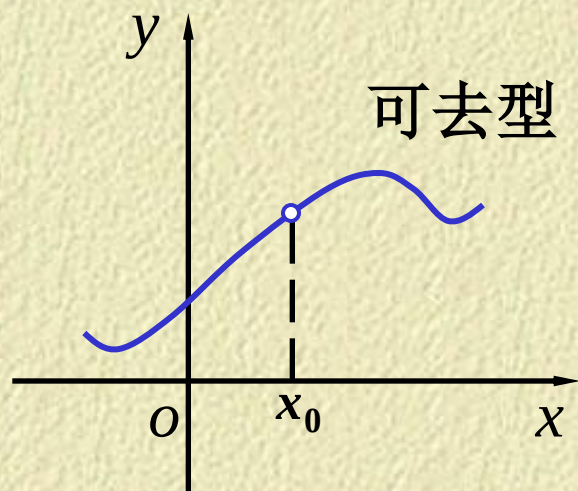
三、小结

- 1.函数在一点连续必须满足的三个条件;
- 2.区间上的连续函数;
- 3.间断点的分类与判别;

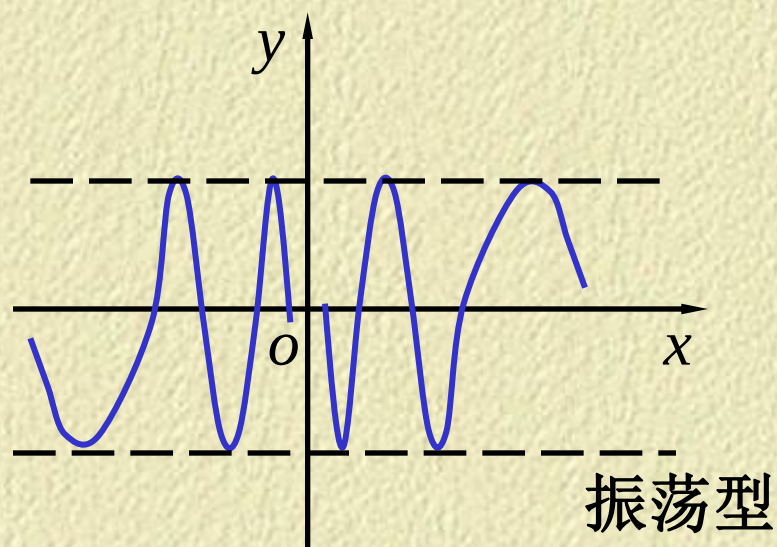
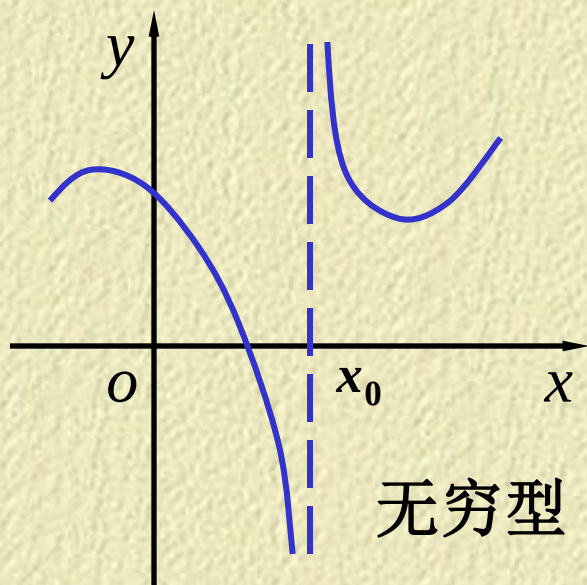
间断点 { 第一类间断点:可去型,跳跃型.
第二类间断点:无穷型,振荡型.

(见下图)

第一类间断点



第二类间断点



思考题

若 $f(x)$ 在 x_0 连续, 则 $|f(x)|$ 、 $f^2(x)$ 在 x_0 是否连续? 又若 $|f(x)|$ 、 $f^2(x)$ 在 x_0 连续, $f(x)$ 在 x_0 是否连续?

思考题解答

$$\because f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 连续, } \therefore \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\text{且 } 0 \leq \|f(x) - f(x_0)\| \leq |f(x) - f(x_0)|$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |f(x_0)|$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right] \cdot \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right] = f^2(x_0)$$

故 $|f(x)|$ 、 $f^2(x)$ 在 x_0 都连续.

但反之不成立.

例 $f(x) = \begin{cases} -1, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x_0 = 0$ 不连续

但 $|f(x)|$ 、 $f^2(x)$ 在 $x_0 = 0$ 连续

练习题

一、填空题：

1、指出 $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ 在 $x = 1$ 是第_____类间断点；在 $x = 2$ 是第_____类间断点。

2、指出 $y = \frac{x^2 - x}{|x|(x^2 - 1)}$ 在 $x = 0$ 是第_____类间断点；在 $x = 1$ 是第_____类间断点；在 $x = -1$ 是第_____类间断点。

二、研究函数 $f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1 \\ 1, & |x| > 1 \end{cases}$ 的连续性，并画出函数的图形。

三、指出下列函数在指定范围内的间断点，并说明这些间断点的类型，如果是可去间断点，则补充或改变函数的定义使它连续。

1、 $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 1 \\ 3-x, & x > 1 \end{cases}$ 在 $x \in R$ 上。

2、 $f(x) = \frac{x}{\tan x}$ ，在 $x \in R$ 上。

四、讨论函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$ 的连续性，若有间断点，判断其类型。

五、试确定 a, b 的值，使 $f(x) = \frac{e^x - b}{(x-a)(x-1)}$ ，

(1) 有无穷间断点 $x=0$ ；(2) 有可去间断点 $x=1$ 。

练习题答案

- 一、 1、 一类, 二类; 2、 一类, 一类, 二类.
- 二、 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 与 $(-1, +\infty)$ 内连续, $x = -1$ 为跳跃间断点.
- 三、 1、 $x = 1$ 为第一类间断点;
- 2、 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ 为可去间断点,
 $x = k\pi (k \neq 0)$ 为第二类间断点.

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{x}{\tan x}, & x \neq k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{x}{\tan x}, & x \neq k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 0, & x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

四、 $f(x) = \begin{cases} x, & |x| < 1 \\ 0, & |x| = 1 \\ -x, & |x| > 1 \end{cases}$ $x = 1$ 和 $x = -1$ 为第一类间断点.

五、 (1) $a = 0, b \neq 1$; (2) $a \neq 1, b = e$.

第十节 连续函数的运算 与初等函数的连续性



一、四则运算的连续性



二、反函数与复合函数的连续性



三、初等函数的连续性



四、小结 思考题

帮助

返回

一、四则运算的连续性

定理1 若函数 $f(x)$, $g(x)$ 在点 x_0 处连续,
则 $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x_0) \neq 0$)
在点 x_0 处也连续.

例如, $\sin x, \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续,

故 $\tan x, \cot x, \sec x, \csc x$ 在其定义域内连续.

二、反函数与复合函数的连续性

定理2 严格单调的连续函数必有严格单调的连续反函数.

例如, $y = \sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调增加且连续,

故 $y = \arcsin x$ 在 $[-1, 1]$ 上也是单调增加且连续.

同理 $y = \arccos x$ 在 $[-1, 1]$ 上单调减少且连续;

$y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$ 在 $[-\infty, +\infty]$ 上单调且连续.

反三角函数在其定义域内皆连续.

定理3 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = a$, 函数 $f(u)$ 在点 a 连续,

则有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = f(a) = f[\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)]$.

证 $\because f(u)$ 在点 $u = a$ 连续,

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$, 使当 $|u - a| < \eta$ 时,
恒有 $|f(u) - f(a)| < \varepsilon$ 成立.

又 $\because \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = a$,

对于 $\eta > 0, \exists \delta > 0$, 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

恒有 $|\varphi(x) - a| = |u - a| < \eta$ 成立.

将上两步合起来:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$|f(u) - f(a)| = |f[\varphi(x)] - f(a)| < \varepsilon$ 成立.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = f(a) = [\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)].$$

意义 1.极限符号可以与函数符号互换;
2.变量代换($u = \varphi(x)$)的理论依据.

例1 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$= \ln[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}] = \ln e = 1.$$

例2 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

解 令 $e^x - 1 = y$, 则 $x = \ln(1 + y)$,

当 $x \rightarrow 0$ 时, $y \rightarrow 0$.

$$\text{原式} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1 + y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1 + y)^{\frac{1}{y}}} = 1.$$

同理可得 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

定理4 设函数 $u = \varphi(x)$ 在点 $x = x_0$ 连续, 且 $\varphi(x_0) = u_0$, 而函数 $y = f(u)$ 在点 $u = u_0$ 连续, 则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在点 $x = x_0$ 也连续.

注意 定理4是定理3的特殊情况.

例如, $u = \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 内连续,

$y = \sin u$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续,

$\therefore y = \sin \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 内连续.

三、初等函数的连续性

- ★ 三角函数及反三角函数在它们的定义域内是连续的.
- ★ 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)
在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调且连续;
- ★ 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)
在 $(0, +\infty)$ 内单调且连续;

★ $y = x^{\mu} = a^{\mu \log_a x} \longrightarrow y = a^u, \quad u = \mu \log_a x.$

在 $(0, +\infty)$ 内连续, 讨论 μ 不同值,

(均在其定义域内连续)

定理5 基本初等函数在定义域内是连续的.

定理6 一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

定义区间是指包含在定义域内的区间.

注意 1. 初等函数仅在其定义区间内连续, 在其定义域内不一定连续;

例如, $y = \sqrt{\cos x - 1}$, $D: x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$

这些孤立点的邻域内没有定义.

$y = \sqrt{x^2(x-1)^3}$, $D: x = 0$, 及 $x \geq 1$,

在0点的邻域内没有定义.

函数在区间 $[1, +\infty)$ 上连续.

注意 2. 初等函数求极限的方法代入法.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (x_0 \in \text{定义区间})$$

例3 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \sin \sqrt{e^x - 1}$.

解 原式 $= \sin \sqrt{e^1 - 1} = \sin \sqrt{e - 1}$.

例4 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$.

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+x^2} + 1)}{x(\sqrt{1+x^2} + 1)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2} + 1} = \frac{0}{2} = 0.$$

四、小结

连续函数的和差积商的连续性.

反函数的连续性.

复合函数的连续性. 两个定理; 两点意义.

初等函数的连续性.

定义区间与定义域的区别;

求极限的另一种方法.

思考题

设 $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = 1 + x^2$, 试研究复合函数 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$ 的连续性.

思考题解答

$$\begin{aligned} \because \quad g(x) &= 1 + x^2 & f(x) &= \begin{cases} -1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases} \\ \therefore \quad f[g(x)] &= \operatorname{sgn}(1 + x^2) = 1 \end{aligned}$$

$f[g(x)]$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处连续

$$g[f(x)] = 1 + (\operatorname{sgn} x)^2 = \begin{cases} 2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$g[f(x)]$ 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上处处连续

$x = 0$ 是它的可去间断点

练习题

一、填空题:

1、 $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + 3x + 4} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

3、 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \ln(2 \cos 2x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

4、 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} - 2 \cos x}{\tan^2 x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

5、 $\lim_{t \rightarrow -2} \frac{e^t + 1}{t} = \underline{\hspace{2cm}}.$

6、设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ a + x, & x \geq 0 \end{cases}$, 当 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

7、函数 $f(x) = \frac{x^4 + x + 1}{x^2 + x - 6}$ 的连续区间为

_____.

8、设 $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & \text{当 } |x| \leq 1 \text{ 时} \\ |x - 1|, & \text{当 } |x| > 1 \text{ 时} \end{cases}$ 确定

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) =$ _____; $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) =$ _____.

二、计算下列各极限:

1、 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a};$

2、 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \tan^2 x)^{\cot x};$

3、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 3}{2x + 1} \right)^{x+1};$

三、设 $f(x) = \begin{cases} a + x^2, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \ln(b + x + x^2), & x > 0 \end{cases}$ 已知 $f(x)$ 在

$x = 0$ 处连续, 试确定 a 和 b 的值.

四、设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 且 $f(0) = 0$, 已知 $|g(x)| \leq |f(x)|$, 试证函数 $g(x)$ 在 $x = 0$ 处也连续.

练习题答案

一、 1、 2; 2、 $\frac{1}{2}$; 3、 0; 4、 0;

5、 $-\frac{1}{2}(\frac{1}{e^2} + 1)$; 6、 1;

7、 $(-\infty, -3), (-3, 2), (2, +\infty)$;

8、 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 0, 不存在.

二、 1、 $\cos a$; 2、 1; 3、 $\frac{1}{e^2}$.

三、 $a = 1, b = e$.

第十一节 闭区间上连续函数的性质



一、最大值和最小值定理



二、介值定理



三、小结 思考题

帮助

返回

一、最大值和最小值定理

定义： 对于在区间 I 上有定义的函数 $f(x)$,
如果有 $x_0 \in I$, 使得对于任一 $x \in I$ 都有

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大(小)值.

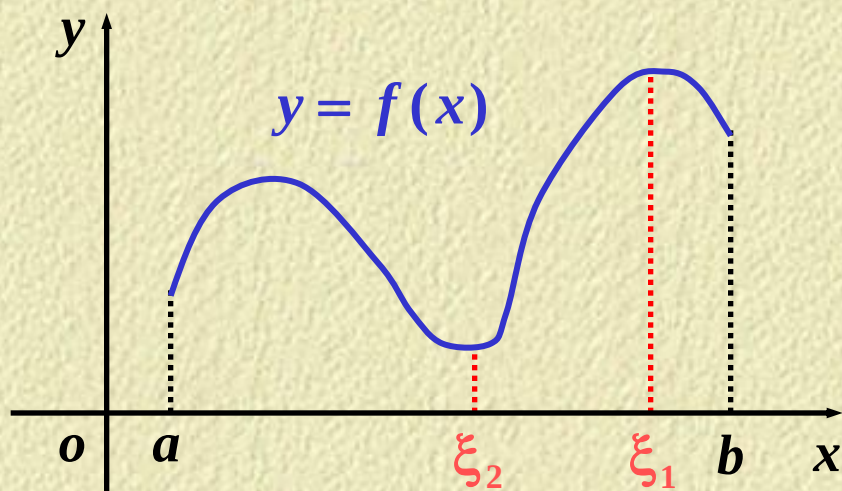
例如, $y = 1 + \sin x$, 在 $[0, 2\pi]$ 上, $y_{\max} = 2$, $y_{\min} = 0$;

$y = \operatorname{sgn} x$, 在 $(-\infty, +\infty)$ 上, $y_{\max} = 1$, $y_{\min} = -1$;

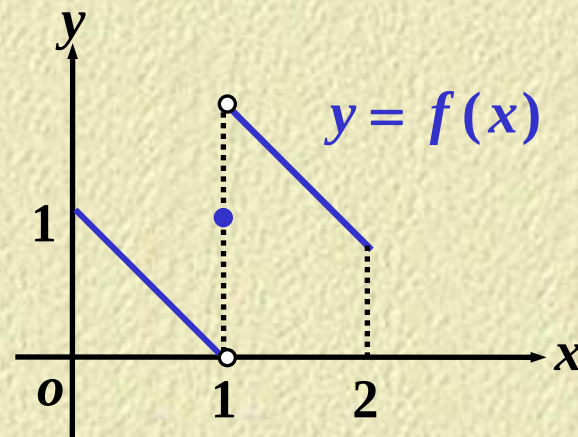
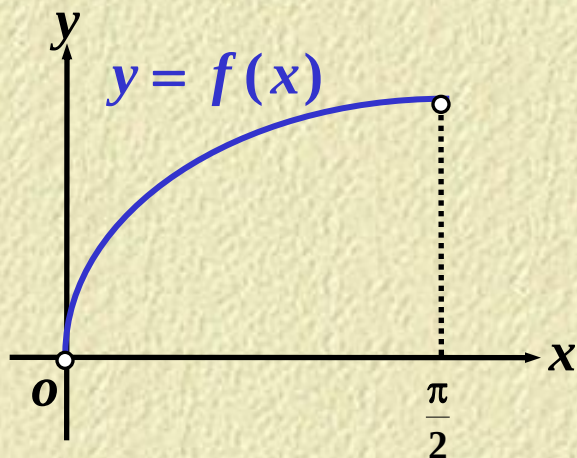
在 $(0, +\infty)$ 上, $y_{\max} = y_{\min} = 1$.

定理1 (最大值和最小值定理) 在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值.

若 $f(x) \in C[a, b]$,
则 $\exists \xi_1, \xi_2 \in [a, b]$,
使得 $\forall x \in [a, b]$,
有 $f(\xi_1) \geq f(x)$,
 $f(\xi_2) \leq f(x)$.



注意: 1. 若区间是开区间, 定理不一定成立;
2. 若区间内有间断点, 定理不一定成立.



定理2(有界性定理) 在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

证 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $\forall x \in [a, b]$,
有 $m \leq f(x) \leq M$, 取 $K = \max\{|m|, |M|\}$,
则有 $|f(x)| \leq K$. $\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

二、介值定理

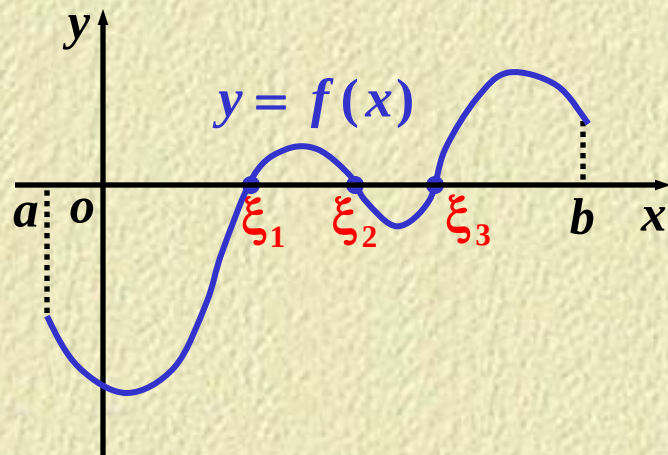
定义： 如果 x_0 使 $f(x_0) = 0$ ，则 x_0 称为函数 $f(x)$ 的零点.

定理 3 (零点定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号 (即 $f(a) \cdot f(b) < 0$)，那末在开区间 (a, b) 内至少有函数 $f(x)$ 的一个零点，即至少有一点 ξ ($a < \xi < b$)，使 $f(\xi) = 0$.

即方程 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内至少存在一个实根 .

几何解释:

连续曲线弧 $y = f(x)$ 的两个端点位于 x 轴的不同侧, 则曲线弧与 x 轴至少有一个交点.



定理 4 (介值定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且在这区间的端点取不同的函数值

$$f(a) = A \text{ 及 } f(b) = B,$$

那末, 对于 A 与 B 之间的任意一个数 C , 在开区间 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使得 $f(\xi) = C$ ($a < \xi < b$).

上页

下页

返回

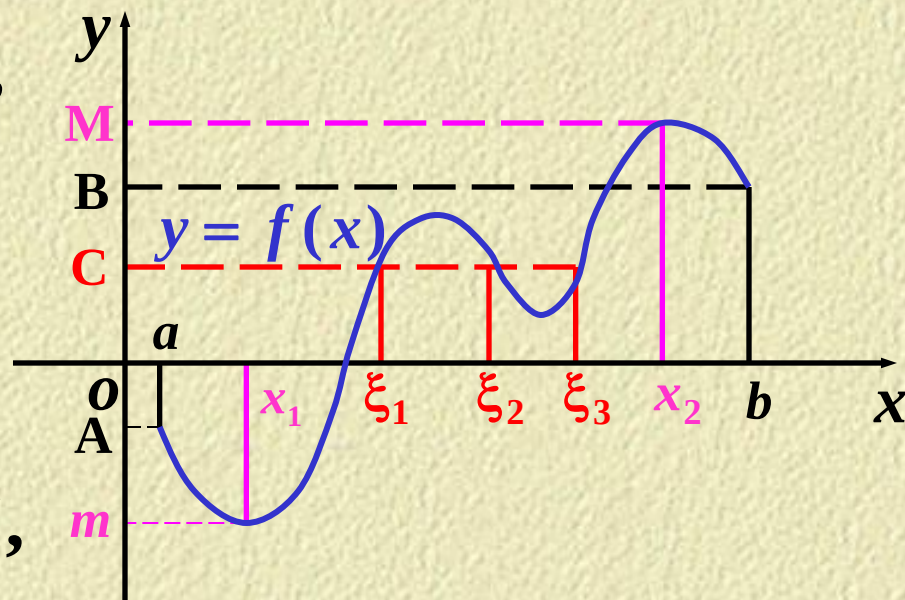
证 设 $\varphi(x) = f(x) - C$,

则 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,

且 $\varphi(a) = f(a) - C$

$$= A - C,$$

$$\varphi(b) = f(b) - C = B - C,$$



$\therefore \varphi(a) \cdot \varphi(b) < 0$, 由零点定理, $\exists \xi \in (a, b)$, 使

$\varphi(\xi) = 0$, 即 $\varphi(\xi) = f(\xi) - C = 0$, $\therefore f(\xi) = C$.

几何解释: 连续曲线弧 $y = f(x)$ 与水平直线 $y = C$ 至少有一个交点.

上页

下页

返回

推论 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

例1 证明方程 $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一根.

证 令 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$, 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,
又 $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = -2 < 0$, 由零点定理,
 $\exists \xi \in (a,b)$, 使 $f(\xi) = 0$, 即 $\xi^3 - 4\xi^2 + 1 = 0$,
 $\therefore$ 方程 $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一根 ξ .

例2 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) < a$,
 $f(b) > b$. 证明 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = \xi$.

证 令 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,

而 $F(a) = f(a) - a < 0$,

$F(b) = f(b) - b > 0$, 由零点定理,

$\exists \xi \in (a, b)$, 使 $F(\xi) = f(\xi) - \xi = 0$,

即 $f(\xi) = \xi$.

三、小结

四个定理

有界性定理;最值定理;介值定理;根的存在性定理.

注意 1. 闭区间; 2. 连续函数.

这两点不满足上述定理不一定成立.

解题思路

1. 直接法:先利用最值定理,再利用介值定理;
2. 辅助函数法:先作辅助函数 $F(x)$,再利用零点定理;

思考题

下述命题是否正确？

如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义，在 (a, b) 内连续，且 $f(a) \cdot f(b) < 0$ ，那么 $f(x)$ 在 (a, b) 内必有零点.

思考题解答

不正确.

例函数 $f(x) = \begin{cases} e, & 0 < x \leq 1 \\ -2, & x = 0 \end{cases}$

$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续, $f(0) \cdot f(1) = -2e < 0$.

但 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内无零点.

练习题

一、证明方程 $x = a \sin x + b$, 其中 $a > 0, b > 0$, 至少有一个正根, 并且它不超过 $a + b$.

二、若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,

$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$ 则在 $[x_1, x_n]$ 上必有

ξ , 使 $f(x) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$.

三、设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $a < c < d < b$, 试证明: 对任意正数 p 和 q ; 至少有一点 $\xi \in [c, d]$, 使 $pf(x) + qf(x) = (p + q)f(\xi)$.